Глава 8

ВЗАИМНАЯ КОНФИГУРАЦИЯ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

В предыдущих параграфах понятие состояния применялось в основном только к одной динамической системе, например к управляемому объекту. Лишь в пп. 7.8.1 и 7.8.2 решение касалось замкнутых систем управления, т.е. систем с обратной связью. Однако системы могут обладать более сложной структурой, каждый элемент которой может быть динамическим элементом, описываемым уравнениями состояния. Отдельные динамические элементы системы со сложной структурой могут образовывать либо параллельную, либо последовательную конфигурацию, либо конфигурацию с обратной связью. Описание этих трех основных конфигураций динамических элементов уравнениями состояния является алгеброй для определения уравнений состояния систем, состоящих из небольшого или даже большого числа элементов. Эта алгебра уравнений состояния будет выведена в последующих параграфах.

§ 8.1. Параллельная конфигурация

Рассмотрим две системы, которые описываются уравнениями состояния

$$x_1(k+1) = A_1x_1(k) + b_1u_1(k), \qquad y_1(k) = c_1^{\mathrm{T}}x_1(k) + d_1u_1(k) \tag{8.1}$$

и

$$x_2(k+1) = A_2x_2(k) + b_2u_2(k), \qquad y_2(k) = c_2^{\mathrm{T}}x_2(k) + d_2u_2(k). \tag{8.2}$$

Эти системы связаны параллельно. Из рис. 8.1 следует, что в этом случае $u_1 = u_2 = u$ и результирующий выходной сигнал $y = y_1 + y_2$. Введя вектор состояния

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \tag{8.3}$$

мы можем записать

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(k), \tag{8.4}$$

$$y(k) = [c_1^{\mathrm{T}}, c_2^{\mathrm{T}}]\,x(k) + (d_1 + d_2)u(k).$$

Уравнения (8.4) представляют результирующие уравнения состояния двух систем, связанных параллельно, которые легко обобщаются на произвольное число параллельных систем.

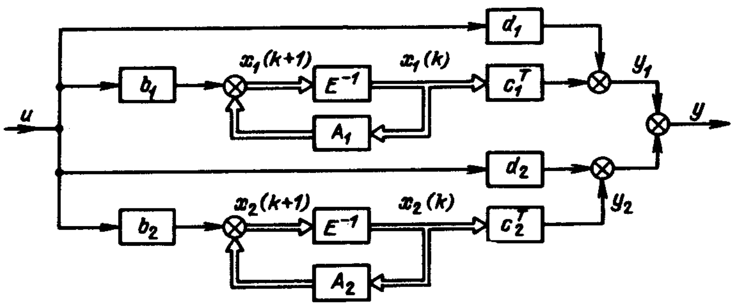


Рис. 8.1. Параллельная конфигурация дискретных систем.

§ 8.2. Последовательная к

Установим теперь уравнени
описываемых уравнениям
системы является входом

$x_1(k+1) = A_1x_1(k) + b_1$

$x_2(k+1) = A_2x_2(k) + b_2$

С помощью вектора состо

$x(k+1) = \Big[\begin{matrix} A_1 \\ b_2c_1^{\mathrm{T}} \end{matrix}$

Выход второй системы зад

$y(k) = y_2(k) = [d_2c_1^{\mathrm{T}}, c_2^{\mathrm{T}}$

Справедливость этого соо
Здесь отдельные компоне
x_1 и x_2 и входной переме

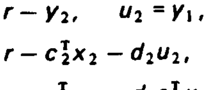


Рис. 8.2. Г

§ 8.3. Конфигурация с обр

Конфигурация с обратной
соответствует блок-схеме

$u_1 = r - y_2, \quad u_2 = y_1,$

$u_1 = r - c_2^{\mathrm{T}}x_2 - d_2u_2,$

$u_1 = r - c_2^{\mathrm{T}}x_2 - d_2c_1^{\mathrm{T}}x_1$

$u_1 = Kr - Kd_2c_1^{\mathrm{T}}x_1 - K$

где предполагается, что

$K = (1 + d_2d_1)^{-1}$

существует.

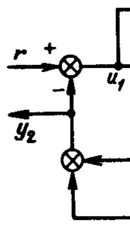


Рис. 8.3.

Глава 8

СТЕМ

основном только к одной
. Лишь в пп. 7.8.1 и 7.8.2
с обратной связью. Одна-
ждый элемент которой мо-
ниями состояния. Отдель-
могут образовывать либо
конфигурацию с обратной
ических элементов уравне-
внений состояния систем,
ов. Эта алгебра уравнений

состояния

(8.1)

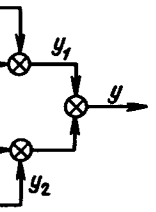
(8.2)

этом случае $u_1 = u_2 = u$ и
остояния

(8.3)

(8.4)

стояния двух систем, свя-
льное число параллельных



систем.

§ 8.2. Последовательная конфигурация

Установим теперь уравнение состояния для последовательного соединения двух систем, описываемых уравнениями (8.1) и (8.2). При таком расположении пусть выход первой системы является входом второй системы, т.е. $y_1 = u_2$. В этом случае

$$x_1(k+1) = A_1 x_1(k) + b_1 u_1(k),$$
$$x_2(k+1) = A_2 x_2(k) + b_2 [c^{\mathrm{T}} x_1(k) + d_1 u_1(k)]. \tag{8.5}$$

С помощью вектора состояния (8.3) мы можем записать уравнения (8.5) в виде

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ b_2 c_1^{\mathrm{T}} & A_2 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 d_1 \end{bmatrix} u_1(k). \tag{8.6}$$

Выход второй системы задается соотношением

$$y(k) = y_2(k) = [d_2 c_1^{\mathrm{T}}, c_2^{\mathrm{T}}] x(k) + d_2 d_1 u_1(k). \tag{8.7}$$

Справедливость этого соотношения непосредственно следует из блок-схемы на рис. 8.2. Здесь отдельные компоненты выходной переменной y образуются векторами состояния x_1 и x_2 и входной переменной u_1.

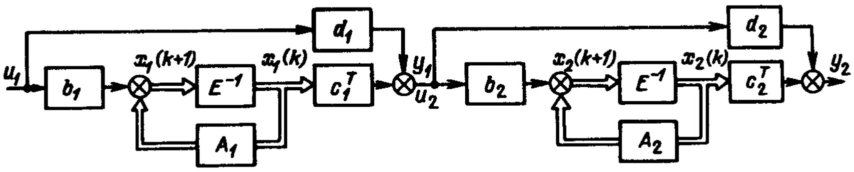


Рис. 8.2. Последовательная конфигурация дискретных систем.

§ 8.3. Конфигурация с обратной связью

Конфигурация с обратной связью двух систем, описываемых уравнениями (8.1) и (8.2), соответствует блок-схеме на рис. 8.3. Из этой блок-схемы следует, что

$$u_1 = r - y_2, \qquad u_2 = y_1, \tag{8.8}$$

$$u_1 = r - c_2^{\mathrm{T}} x_2 - d_2 u_2, \tag{8.9}$$

$$u_1 = r - c_2^{\mathrm{T}} x_2 - d_2 c_1^{\mathrm{T}} x_1 - d_2 d_1 u_1, \tag{8.10}$$

$$u_1 = Kr - K d_2 c_1^{\mathrm{T}} x_1 - K c_2^{\mathrm{T}} x_2, \tag{8.11}$$

где предполагается, что

$$K = (1 + d_2 d_1)^{-1} \tag{8.12}$$

существует.

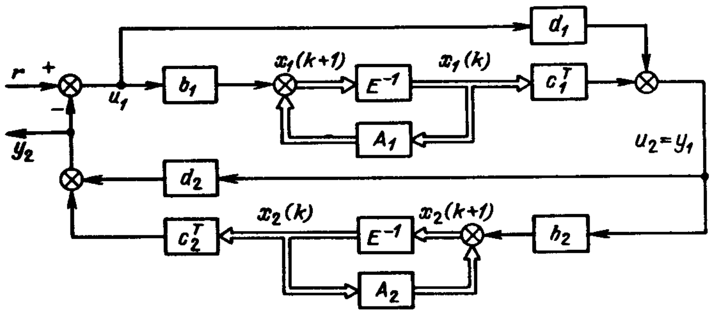


Рис. 8.3. Конфигурация с обратной связью дискретных систем.

Ради ясности аргумент k у переменных и векторов из выражений (8.8) – (8.12) опущен. С помощью выражения (8.11) первое из уравнений (8.1) принимает вид

$$x_1(k+1) = (A_1 - b_1 K d_2 c_1^{\mathrm{T}}) x_1(k) - b_1 K c_2^{\mathrm{T}} x_2(k) + b_1 K r(k). \tag{8.13}$$

Подставляя $u_2(k)$ в первое из уравнений (8.2), мы получим

$$x_2(k+1) = (b_2 c_1^{\mathrm{T}} - b_2 d_1 K d_2 c_1^{\mathrm{T}}) x_1(k) + (A_2 - b_2 d_1 K c_2^{\mathrm{T}}) x_2(k) + b_2 d_1 K r(k). \tag{8.14}$$

С помощью вектора (8.3) уравнения состояния системы с обратной связью можно представить следующим способом:

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} A_1 & -b_1 K d_2 c_1^{\mathrm{T}} & -b_1 K c_2^{\mathrm{T}} \\ b_2 c_1^{\mathrm{T}} & -b_2 d_1 K d_2 c_1^{\mathrm{T}} & A_2 - b_2 d_1 K c_2^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} x(k) +$$

$$+ \begin{bmatrix} b_1 K \\ b_2 d_1 K \end{bmatrix} r(k) = A x(k) + b r(k). \tag{8.15}$$

Согласно второму уравнению (8.2) и выражению (8.11) уравнение выхода имеет вид

$$y_2(k) = c_2^{\mathrm{T}} x_2(k) + d_2 [c_1^{\mathrm{T}} x_1(k) + d_1 u_1(k)] = c_2^{\mathrm{T}} x_2(k) +$$

$$+ d_2 c_1^{\mathrm{T}} x_1(k) + d_2 d_1 [K r(k) - K c_2^{\mathrm{T}} x_2(k) - K d_2 c_1^{\mathrm{T}} x_1(k)] =$$

$$= [d_2 (1 - d_1 K d_2) c_1^{\mathrm{T}}, (1 - d_2 d_1 K) c_2^{\mathrm{T}}] x(k) + d_2 d_1 K r(k) = c^{\mathrm{T}} x(k) + d r(k). \tag{8.16}$$

Это уравнение может быть также записано в форме

$$y_2(k) = [K d_2 c_1^{\mathrm{T}}, K c_2^{\mathrm{T}}] x(k) + K d_2 d_1 r(k), \tag{8.17}$$

которая применима к системам со многими входами и многими выходами, где c_1^{T}, c_2^{T}, d_1 и d_2 – прямоугольные матрицы, поскольку

$$d_2 c_1^{\mathrm{T}} - d_2 d_1 K d_2 c_1^{\mathrm{T}} = K^{-1} K d_2 c_1^{\mathrm{T}} - d_2 d_1 K d_2 c_1^{\mathrm{T}} =$$

$$= (K^{-1} - d_2 d_1) K d_2 c_1^{\mathrm{T}} = K d_2 c_1^{\mathrm{T}}, \tag{8.18}$$

$$c_2^{\mathrm{T}} - d_2 d_1 K c_2^{\mathrm{T}} = K^{-1} K c_2^{\mathrm{T}} - d_2 d_1 K c_2^{\mathrm{T}} = K c_2^{\mathrm{T}}, \quad d_2 d_1 K = K d_2 d_1. \tag{8.19}$$

Последнее равенство доказывается так:

$$K^{-1} d_2 d_1 K - d_2 d_1 = (1 + d_2 d_1) d_2 d_1 K - d_2 d_1 =$$

$$= d_2 d_1 (1 + d_2 d_1) K - d_2 d_1 = d_2 d_1 K^{-1} K - d_2 d_1 = 0. \tag{8.20}$$

Если показанная на рис. 8.3 система представляет собой замкнутую систему управления с управляющей переменной u и управляемой переменной y_2, то система, заданная уравнениями (8.1), описывает управляющее устройство, а система, заданная уравнениями (8.2), – управляемый объект. В этом случае для удовлетворения требования физической реализуемости управляемого объекта коэффициент d_2 должен быть равен нулю. И наоборот, для цифрового корректирующего элемента мы допускаем $d_1 \neq 0$.

Уравнения состояния, полученные для параллельной, последовательной конфигурации и конфигурации с обратной связью, применимы к двум системам с одним входом и одним выходом. Обобщение на большее число систем не представляет особых трудностей. Окончательные выражения, полученные для систем с одним входом и одним выходом, применимы также к системам со многими входами и многими выходами при условии, что b_1, b_2, c_1, c_2, d_1 и d_2 заменены на соответствующие прямоугольные матрицы. Если мы обозначим (в круглых скобках) размерности отдельных матриц как $A_i(n_i; n_i)$, $B_i(n_i, r_i)$, $C_i(p_i; n_i)$ и $D_i(p_i; r_i)$, $i = 1, 2$, где n_i – порядок соответствующей системы, p_i – число выходных переменных и r_i – число входных переменных, то для системы с обратной связью должны выполняться условия $p_1 = r_2$ и $r_1 = p_2$. Результирующие матрицы имеют размерности $A(n, n)$, $B(n; p_2)$, $C(r_1; n)$ и $D(r_1; r)$, где $n = n_1 + n_2$. Вывод приведенных выше уравнений состояния для других взаимных расположений систем предоставляется читателю.

§ 9.1. Достижимость, у

При решении задач уп
некоторые фундамент
в классической теори
напами рассматривае
ляемость и стабилизи
встречаются в §§ 9.2
рый позволяет кратко
задач синтеза, т.е. дл
мальное в заданном см

Здесь следует отме
ния в целом, рассмат
вательно, применяемы
же являются решения
обеспечивающего опти
теория пространства
условий управляемос
позволяет нам рассчи
ческих операций. Это,
не может быть управ
отметить, что стабили
для реализации упра

Мы будем последо
они могут быть прове

Определение
вует момент времен
который переводит н
[69.4].

Определение
ществует момент вр
системы $x(t_1)$ в состо

Существующее по
мент времени t озн
В стационарных ди
зависят от момента
яние управляемо. П
но говорят только
достижимостью и у
линейной системы м
с помощью соответ
ваемой уравнением

$x(k+1) = Ax(k) +$

*) Для простоты вп
темы будут использова

СВОЙСТВА СИСТЕМ

§ 9.1. Достижимость, управляемость и стабилизируемость

При решении задач управления методами теории пространства состояний учитываются некоторые фундаментальные свойства динамических систем, которые не встречаются в классической теории управления, оперирующей только входными и выходными сигналами рассматриваемой системы. Этими свойствами являются достижимость, управляемость и стабилизируемость систем. Все эти три понятия, а также и другие, которые встречаются в §§ 9.2 и 9.3, определяются строго. Они представляют инструмент, который позволяет кратко выразить и сформулировать условия, необходимые для решения задач синтеза, т.е. для расчета управляющего устройства, которое обеспечивает оптимальное в заданном смысле управление.

Здесь следует отметить, что теория пространства состояний, как и теория управления в целом, рассматривает не реальные объекты, а их математические модели. Следовательно, применяемый здесь аппарат может быть только математическим, и такими же являются решения, которые дает эта теория. При расчете управляющего устройства, обеспечивающего оптимальное в определенном смысле управление заданным объектом, теория пространства состояний часто требует от управляемого объекта выполнения условий управляемости и наблюдаемости [69.4]. Выполнение этих требований часто позволяет нам рассчитывать оптимальное управление с помощью простых математических операций. Это, однако, не означает, что неуправляемая и ненаблюдаемая система не может быть управляема субоптимально в практическом смысле. Следует заранее отметить, что стабилизируемость и обнаруживаемость объекта являются решающими для реализации управления им. Эти основные понятия определяются в этой главе.

Мы будем последовательно определять основные свойства систем и покажем, как они могут быть проверены.

Определение 9.1. *Состояние $x(t_1)$ линейной системы достижимо, если существует момент времени $t_0 < t_1$, где $(t_1 - t_0)$ — конечный интервал, и такой вход $u(t)$, который переводит начальное состояние системы $x(t_0) = 0$ в желаемое состояние $x(t_1)$* [69.4].

Определение 9.2. *Состояние $x(t_1)$ линейной системы управляемо, если существует момент времени $t_2 > t_1$ и такой вход $u(t)$, который переводит состояние системы $x(t_1)$ в состояние $x(t_2) = 0$ при условии, что интервал $t_2 - t_1$ конечен.*

Существующее понятие так называемой полной достижимости системы *) в момент времени t означает, что любое состояние $x(t) \in X$ достижимо или управляемо. В стационарных дискретных системах достижимость и управляемость состояния не зависят от момента времени t_1. Если к тому же система непрерывна, то каждое состояние управляемо. Поэтому в литературе, посвященной непрерывным системам, обычно говорят только об управляемости, поскольку здесь отсутствует различие между достижимостью и управляемостью состояния. Начальное состояние $x(t_0)$ непрерывной линейной системы может быть переведено за конечное время в любое другое состояние с помощью соответствующего входного сигнала. Для дискретной системы, описываемой уравнением

$$x(k+1) = Ax(k) + bu(k), \tag{9.1}$$

*) Для простоты впредь вместо терминов "полная достижимость" ("полная управляемость") системы будут использованы термины "достижимость" ("управляемость") системы.

это справедливо, если

$$\det[A] \neq 0. \tag{9.2}$$

Из выражения (7.62) и определения матрицы $A = \exp[FT]$ следует, что у матрицы дискретизованной непрерывной системы всегда $\det[A] \neq 0$. Для дискретных же систем, физическая природа которых не является непрерывной, например для цифровых корректирующих элементов, дискретных автоматов и т.д., условие (9.2) выполняется не всегда.

Требование перехода системы из произвольного состояния в другое произвольное состояние можно заменить на требование, которое заключается в том, что система, переведенная из нулевого состояния в ненулевое состояние $x(t_1)$, должна быть переводимой в исходное нулевое состояние с помощью соответствующего входного сигнала. Если система удовлетворяет такому требованию, то мы называем такую систему *обратимой*.

Например, система

$$x(k+1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(k),$$

которая представляет последовательное соединение двух звеньев первого порядка, не является обратимой. Состояние $x(1)$ этой системы управляемо, поскольку при начальном состоянии $x^{\mathrm{T}}(0) = [x_1(0), x_2(0)]$, $x_1(0) \neq 0, x_2(0) \neq 0$ мы получаем $x^{\mathrm{T}}(1) = [x_2(0), 0]$ и $x^{\mathrm{T}}(2) = [0, 0]$. Однако эта система недостижима, поскольку ее нельзя перевести из нулевого начального состояния в другое произвольное состояние с помощью любого входа $u(k)$.

Последующие соотношения можно получить из условий достижимости и управляемости.

Из выражения (7.1) следует, что

$$x(k) = A^k x(0) + A^{k-1}bu(0) + A^{k-2}bu(1) + \ldots + Abu(k-2) + bu(k-1) =$$

$$= A^k x(0) + [b, Ab, \ldots, A^{k-1}b]\,[u(k-1), u(k-2), \ldots, u(0)]^{\mathrm{T}}. \tag{9.3}$$

Для исследования достижимости состояния $x(k)$ положим $x(0) = 0$, так что первое слагаемое в правой части выражения (9.3) исчезает. Тогда любое состояние из пространства, натянутого на векторы $b, Ab, \ldots, A^{n-1}b$, достижимо за n шагов при воздействии входной последовательности $u(0), u(1), \ldots, u(n-1)$. Эти векторы должны быть линейно независимы *) для того, чтобы система (9.1) могла быть переведена в желаемое состояние $x(n)$, где n — размерность пространства состояний. Из этого условия следует

Т е о р е м а 9.1. *Состояние $x(n)$ системы* (9.1) *достижимо, если и только если ранг h матрицы $[b, Ab, \ldots, A^{n-1}b]$ равен размерности пространства состояний n.*

Очевидно, что произвольное состояние $x(k)$ не достижимо, если $k < n$. Если $k = n$, то система достижима, но в общем случае при $k > n$ может быть недостижимой, например, в случае объекта с ограниченным входом.

Т е о р е м а 9.2. *Если вектор A^ib линейно зависит от векторов $b, Ab, \ldots, A^{i-1}b$, то каждый последующий вектор A^mb, $m > i$, также зависит от этих же векторов.*

Докажем теорему 9.2. Согласно предположению мы имеем

$$A^ib = \sum_{j=0}^{i-1} {}^0c_jA^jb. \tag{9.4}$$

Следующий вектор можно тогда выразить так:

$$A^{i+1}b = \sum_{j=0}^{i-1} {}^0c_jA^{j+1}b = \sum_{k=1}^{i} {}^0c_{k-1}A^kb, \tag{9.5}$$

*) Определение линейной независимости векторов см. в приложении Б.

где в последней сумме п
этой суммы, мы получим

$$A^{i+1}b = \sum_{k=1}^{i-1} {}^0c_{k-1}A^kb \ldots$$

$$+ {}^0c_{i-1} \sum_{j=0}^{i-1} {}^0c_jA^jb = \ldots$$

Предполагая, что утв
$\ldots, A^{i+m-1}b$, докажем, ч

$$A^{i+m}b = \sum_{j=0}^{i-1} {}^0c_jA^{j+m}b = \ldots$$

$$+ {}^0c_{i-m+1}A^{i+1}b + \ldots +$$

$$\ldots + {}^0c_{i-1}\sum_{j=0}^{i-1} {}^{(m-1)}c_j \ldots$$

Первое слагаемое в пред
доказывает теорему 9.2.

Согласно теореме 9.1 с

$$Q_D = [b, Ab, \ldots, A^{n-} \ldots$$

равен $h = n$. В этом случа
вательность значений упр

$$u(k) = Q_D^{-1}[x(k) - A^kx(\ldots$$

Условия управляемос
деления 9.2 следует, что x

$$A^nx(0) = -[b, Ab, \ldots$$

$$x(0) = -[A^{-n}b, A^{-n+} \ldots$$

Для того чтобы система
делению 9.2 за n шагов и
$u(0), \ldots, u(n-1)$ в сос
надо, чтобы состояние
$A^{-n}b, A^{-n+1}b, \ldots, A^{-1}$
в противном случае сост
следует

Т е о р е м а 9.3. *Сост
ранг h матрицы $[A^{-1}b,$*

Очевидно, что эта тео
было отмечено, что это
держащих квантующий
матрица A может быть
определяться на основе

Если в теореме 9.3 об
$\det A \neq 0$. Это подтверж
Q_R, определяемой теор
на невырожденную матр
лучим матрицу Q_D, в
Следовательно, если ма
мости эквивалентны.

где в последней сумме проведена подстановка $j+1=k$. Выделяя последнее слагаемое этой суммы, мы получим

$$A^{i+1}b=\sum_{k=1}^{i-1}{}^0c_{k-1}A^kb+{}^0c_{i-1}A^ib=\sum_{k=1}^{i-1}{}^0c_{k-1}A^kb+$$

$$+{}^0c_{i-1}\sum_{j=0}^{i-1}{}^0c_jA^jb=\sum_{j=0}^{i-1}{}^1c_jA^jb. \tag{9.6}$$

Предполагая, что утверждение теоремы справедливо для векторов $A^{i+2}b,\ldots$ $\ldots,A^{i+m-1}b$, докажем, что оно справедливо и для вектора $A^{i+m}b$.

$$A^{i+m}b=\sum_{j=0}^{i-1}{}^0c_jA^{j+m}b=\sum_{k=m}^{i+m-1}{}^0c_{k-m}A^kb=\sum_{k=m}^{i-1}{}^0c_{k-m}A^kb+{}^0c_{i-m}A^ib+$$

$$+{}^0c_{i-m+1}A^{i+1}b+\ldots+{}^0c_{i-1}A^{i+m-1}b=\sum_{k=m}^{i-1}{}^0c_{k-m}A^kb+{}^0c_{i-m}\sum_{j=0}^{i-1}{}^0c_jA^jb+\ldots$$

$$\ldots+{}^0c_{i-1}\sum_{j=0}^{i-1}{}^{(m-1)}c_jA^jb=\sum_{j=0}^{i-1}{}^{(m)}c_jA^jb. \tag{9.7}$$

Первое слагаемое в предпоследней сумме равно нулю, если $i-1<m$. Выражение (9.7) доказывает теорему 9.2.

Согласно теореме 9.1 состояние системы (9.1) достижимо, если ранг матрицы

$$Q_{\mathrm{D}}=[b,Ab,\ldots,A^{n-1}b] \tag{9.8}$$

равен $h=n$. В этом случае мы можем с помощью выражения (9.3) вычислить последовательность значений управляющей переменной

$$u(k)=Q_{\mathrm{D}}^{-1}\,[x(k)-A^kx(0)],\quad k=1,2,\ldots,n. \tag{9.9}$$

Условия управляемости могут быть также получены из выражения (9.3). Из определения 9.2 следует, что $x(k)=x(n)=0$ и $x(0)\neq 0$. Мы имеем

$$A^nx(0)=-[b,Ab,\ldots,A^{n-1}b]\,[u(n-1),\ldots,u(0)]^{\mathrm{T}}, \tag{9.10}$$

$$x(0)=-[A^{-n}b,A^{-n+1}b,\ldots,A^{-1}b]\,[u(n-1),\ldots,u(0)]^{\mathrm{T}}=-Q_{\mathrm{R}}u(k). \tag{9.11}$$

Для того чтобы система была управляема, т.е. могла быть переведена согласно определению 9.2 за n шагов из состояния $x(0)\neq 0$ с помощью входной последовательности $u(0),\ldots,u(n-1)$ в состояние $x(n)=0$, где n — размерность пространства состояний, надо, чтобы состояние $x(0)$ принадлежало пространству, натянутому на векторы $A^{-n}b,A^{-n+1}b,\ldots,A^{-1}b$. Эти векторы должны быть линейно независимы, поскольку в противном случае состояние $x(n)=0$ не может быть достигнуто. Из сказанного выше следует

Теорема 9.3. *Состояние $x(0)\neq 0$ системы* (9.1) *управляемо, если и только если ранг h матрицы $[A^{-1}b,A^{-2}b,\ldots,A^{-n}b]$ равен размерности n пространства состояний.*

Очевидно, что эта теорема справедлива только при невырожденной матрице A. Ранее было отмечено, что это требование всегда выполняется в непрерывных системах, содержащих квантующий элемент. В системах, которые по своей природе дискретны, матрица A может быть и необратимой. В этом случае условие управляемости должно определяться на основе соотношения (9.10).

Если в теореме 9.3 обратная к матрице A существует, то эта матрица невырождена и $\det A\neq 0$. Это подтверждает условие (9.2). Следует также отметить, что ранг матрицы Q_{R}, определяемой теоремой 9.3, остается неизменным, если эту матрицу умножить на невырожденную матрицу. Если эту матрицу умножить слева на матрицу A^n, мы получим матрицу Q_{D}, в которой столбцы, однако, расположены в обратном порядке. Следовательно, если матрица A невырождена, то условия достижимости и управляемости эквивалентны.

где в последней сумме проведена подстановка $j + 1 = k$. Выделяя последнее слагаемое этой суммы, мы получим

$$A^{i+1}b = \sum_{k=1}^{i-1} {}^0c_{k-1}A^k b + {}^0c_{i-1}A^i b = \sum_{k=1}^{i-1} {}^0c_{k-1}A^k b + {}^0c_{i-1} \sum_{j=0}^{i-1} {}^0c_j A^j b = \sum_{j=0}^{i-1} {}^1c_j A^j b. \tag{9.6}$$

Предполагая, что утверждение теоремы справедливо для векторов $A^{i+2}b, \ldots$ $\ldots, A^{i+m-1}b$, докажем, что оно справедливо и для вектора $A^{i+m}b$.

$$A^{i+m}b = \sum_{j=0}^{i-1} {}^0c_j A^{j+m} b = \sum_{k=m}^{i+m-1} {}^0c_{k-m}A^k b = \sum_{k=m}^{i-1} {}^0c_{k-m}A^k b + {}^0c_{i-m}A^i b +$$

$$+ {}^0c_{i-m+1}A^{i+1}b + \ldots + {}^0c_{i-1}A^{i+m-1}b = \sum_{k=m}^{i-1} {}^0c_{k-m}A^k b + {}^0c_{i-m}\sum_{j=0}^{i-1} {}^0c_j A^j b + \ldots$$

$$\ldots + {}^0c_{i-1}\sum_{j=0}^{i-1} {}^{(m-1)}c_j A^j b = \sum_{j=0}^{i-1} {}^{(m)}c_j A^j b. \tag{9.7}$$

Первое слагаемое в предпоследней сумме равно нулю, если $i - 1 < m$. Выражение (9.7) доказывает теорему 9.2.

Согласно теореме 9.1 состояние системы (9.1) достижимо, если ранг матрицы

$$Q_{\rm D} = [b, Ab, \ldots, A^{n-1}b] \tag{9.8}$$

равен $h = n$. В этом случае мы можем с помощью выражения (9.3) вычислить последовательность значений управляющей переменной

$$u(k) = Q_{\rm D}^{-1}\,[x(k) - A^k x(0)], \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{9.9}$$

Условия управляемости могут быть также получены из выражения (9.3). Из определения 9.2 следует, что $x(k) = x(n) = 0$ и $x(0) \neq 0$. Мы имеем

$$A^n x(0) = -\,[b, Ab, \ldots, A^{n-1}b]\,[u(n-1), \ldots, u(0)]^{\rm T}, \tag{9.10}$$

$$x(0) = -\,[A^{-n}b, A^{-n+1}b, \ldots, A^{-1}b]\,[u(n-1), \ldots, u(0)]^{\rm T} = -Q_{\rm R}u(k). \tag{9.11}$$

Для того чтобы система была управляема, т.е. могла быть переведена согласно определению 9.2 за n шагов из состояния $x(0) \neq 0$ с помощью входной последовательности $u(0), \ldots, u(n-1)$ в состояние $x(n) = 0$, где n — размерность пространства состояний, надо, чтобы состояние $x(0)$ принадлежало пространству, натянутому на векторы $A^{-n}b, A^{-n+1}b, \ldots, A^{-1}b$. Эти векторы должны быть линейно независимы, поскольку в противном случае состояние $x(n) = 0$ не может быть достигнуто. Из сказанного выше следует

Теорема 9.3. *Состояние $x(0) \neq 0$ системы* (9.1) *управляемо, если и только если ранг h матрицы $[A^{-1}b, A^{-2}b, \ldots, A^{-n}b]$ равен размерности n пространства состояний.*

Очевидно, что эта теорема справедлива только при невырожденной матрице A. Ранее было отмечено, что это требование всегда выполняется в непрерывных системах, содержащих квантующий элемент. В системах, которые по своей природе дискретны, матрица A может быть и необратимой. В этом случае условие управляемости должно определяться на основе соотношения (9.10).

Если в теореме 9.3 обратная к матрице A существует, то эта матрица невырождена и $\det A \neq 0$. Это подтверждает условие (9.2). Следует также отметить, что ранг матрицы $Q_{\rm R}$, определяемой теоремой 9.3, остается неизменным, если эту матрицу умножить на невырожденную матрицу. Если эту матрицу умножить слева на матрицу A^n, мы получим матрицу $Q_{\rm D}$, в которой столбцы, однако, расположены в обратном порядке. Следовательно, если матрица A невырождена, то условия достижимости и управляемости эквивалентны.

Сравнивая условия достижимости (теорема 9.1) с условиями управляемости (теорема 9.3), мы видим, что требование обратимости необходимо означает, что матрица A должна иметь обратную т.е. должно выполняться условие (9.2).

Векторы, составляющие матрицу Q_R, обладают свойством, аналогичным свойству векторов, которые составляют матрицу Q_D: если вектор $A^{-i}b$ линейно зависит от векторов $A^{-1}b, \ldots, A^{-(i-1)}b$, то все последующие векторы $A^{-m}b, m > i$, также линейно зависят от этих векторов. Можно также доказать, что если столбцы матрицы Q_D линейно независимы, то столбцы матрицы Q_R также линейно независимы.

Поскольку в дальнейшем мы в основном будем рассматривать дискретные системы, порожденные наличием квантующего элемента в непрерывных системах, в которых условие $\det A \neq 0$ выполняется всегда, то необходимо будет исследовать только условие достижимости.

В непрерывных системах требование достижимости состояния совпадает с требованием управляемости, и поэтому в технической литературе по непрерывным системам используется только понятие управляемости. Очень часто условие управляемости определяется, как в теореме 9.1, т.е. заменяется условием достижимости в дискретных системах. Непрерывная система, на вход которой поступает ступенчатая функция и выход которой квантуется синхронно со входом, может быть недостижимой, даже если непрерывная система управляема. Это происходит в том случае, если характеристическое уравнение непрерывной системы имеет по крайней мере одну пару комплексных корней с равными действительными частями, т.е. если $s_{1,2} = \alpha \pm j\omega$. В дискретном варианте условие достижимости нарушается, если период квантования $T = k\pi/\omega$, $k = 1, 2, 3, \ldots$

Здесь следует отметить, что в системе, которая не является достижимой (и управляемой) в указанном выше смысле, при некоторых предположениях может быть обеспечен с помощью управляющего устройства, находящегося в замкнутой системе, устойчивый процесс управления. В таком случае мы говорим о стабилизируемой системе. В работах [68.10, 72.5] приведено следующее определение.

Определение 9.3. *Система* (A, B) *стабилизируема, если существует такая действительная матрица* K, *что матрица* $A-BK$ *устойчива, т.е. что для всех собственных значений матрицы* $A-BK$ *имеет место* $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Согласно другому определению система (A, B) стабилизируема, если и только если выходные компоненты (моды), соответствующие неустойчивым собственным значениям матрицы A, достижимы.

Определение 9.3 утверждает, что все, что необходимо для стабилизации, — это управляющее устройство, выходные управляющие переменные которого представляют линейное преобразование вектора состояния, т.е.

$$u(k) = -Kx(k). \tag{9.12}$$

Условия стабилизируемости в действительности — это условия устойчивости замкнутой системы управления, содержащей неустойчивый объект, в которой вход элемента обратной связи (управляющего устройства) определяется вектором переменных состояния управляемого объекта. Мы вернемся к этой возможности расчета управляющего устройства в замкнутой системе управления в следующих главах, посвященных задачам синтеза, в которых основной целью является расчет матрицы K.

§ 9.2. Наблюдаемость, восстанавливаемость и обнаруживаемость

Во многих случаях состояние системы (9.1) не измеряется и, следовательно, управление согласно соотношению (9.12) не может быть непосредственно реализовано. Таким образом, возникает вопрос, можно ли определить вектор состояния по измеряемому выходу или по измеряемым выходам объекта со многими входами и многими выходами? В этой связи мы различаем [69.4] наблюдаемость состояния и восстанавливаемость состояния.

Определение 9.4. *Состояние* $x(t_0)$ *системы наблюдаемо, если оно может быть определено по будущим значениям выходной переменной* $y(t), t > t_0$, *и если интервал* $t - t_0$ *конечен.*

Определение 9.5. *Состояние* $x(t_0)$ *системы восстанавливаемо, если оно может быть определено по прошлым значениям выходной переменной* $y(t)$, $t < t_0$, *и если интервал* $t_0 - t$ *конечен.*

Условия наблюдаемост
хода

$y(k) = c^T x(k) + du(k)$

и уравнения состояния (
ной для моментов времен

$y(k) = c^T x(k) + du(k),$

$y(k+1) = c^T Ax(k) + c^T b$

$y(k+2) = c^T A^2 x(k) + c^T$

. . . .

$y(k+n-1) = c^T A^{n-1} x($

$\ldots + c^T Abu(k+n-3) +$

или в векторно-матричной

$\begin{bmatrix} y(k) \\ y(k+1) \\ \ldots \\ y(k+n-1) \end{bmatrix} =$

$+ \begin{bmatrix} d & 0 \\ c^T b & d \\ c^T Ab & c^T b \\ \ldots & \ldots \\ c^T A^{n-2} b & c^T A \end{bmatrix}$

или в компактной форме

$y_n(k) = Q_P x(k) + P_P u_n(k$

Можно показать, что для
позиции, условия наблюд
выходов $y_n(k)$.

Если воспользоваться
ставление выхода линейны

$\eta(t, \varphi(t, \tau, x, \omega)) = \eta(t, \varphi$

где первое слагаемое в г
начальным состоянием, а
ным сигналом. Следовател

$\eta(t, \varphi(t; \tau, x_1, \omega)) - \eta(t,$

$- \eta(t, \varphi(t; \tau, x_2, 0)) = \eta($

Из соотношения (9.18) с
щаются, и окончательное
$x_1 - x_2$. Рассматривая сос
яние и полагая $x_2 = 0$, из
случае начальное состоян
ния будущих значений вы
в правой части выражения

Если матрица Q_P невыр
строки матрицы Q_P линейн

$x(k) = Q_P^{-1} y_n(k)$.

ями управляемости (те-
имо означает, что матри-
(9.2).
и, аналогичным свойству
^{-i}b линейно зависит от
$A^{-m}b, m>i$, также ли-
о если столбцы матрицы
ю независимы.

ивать дискретные систе-
ывных системах, в кото-
удет исследовать только

яния совпадает с требо-
по непрерывным систе-
го условие управляемос-
м достижимости в диск-
упает ступенчатая функ-
жет быть недостижимой,
том случае, если харак-
ней мере одну пару ком-
сли $s_{1,2} = \alpha \pm j\omega$. В диск-
период квантования T =

достижимой (и управля-
ениях может быть обес-
мкнутой системе, устой-
абилизируемой системе.

если существует такая
что для всех собствен-
n.

ема, если и только если
ивым собственным зна-

стабилизации, — это уп-
которого представляют

(9.12)

вия устойчивости замк-
т, в которой вход эле-
ется вектором перемен-
озможности расчета уп-
едующих главах, посвя-
счет матрицы K.

ь

следовательно, управле-
твенно реализовано. Та-
р состояния по измеря-
огими входами и многи-
мость состояния и вос-

о, если оно может быть
$t>t_0$, и если интервал

иваемо, если оно может
ой $y(t)$, $t<t_0$, и если

Условия наблюдаемости и восстанавливаемости можно получить из уравнения выхода

$$y(k) = c^{\mathrm{T}}x(k) + du(k) \tag{9.13}$$

и уравнения состояния (9.1). Вычисляя последовательно значения выходной переменной для моментов времени $k, k+1, \ldots, k+n-1$, мы получим

$$\begin{aligned}
&y(k) = c^{\mathrm{T}}x(k) + du(k),\\
&y(k+1) = c^{\mathrm{T}}Ax(k) + c^{\mathrm{T}}bu(k) + du(k+1),\\
&y(k+2) = c^{\mathrm{T}}A^2x(k) + c^{\mathrm{T}}Abu(k) + c^{\mathrm{T}}bu(k+1) + du(k+2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y(k+n-1) = c^{\mathrm{T}}A^{n-1}x(k) + c^{\mathrm{T}}A^{n-2}bu(k) + \ldots\\
&\ldots + c^{\mathrm{T}}Abu(k+n-3) + c^{\mathrm{T}}bu(k+n-2) + du(k+n-1),
\end{aligned} \tag{9.14}$$

или в векторно-матричной форме

$$\begin{bmatrix} y(k) \\ y(k+1) \\ \ldots \\ y(k+n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^{\mathrm{T}} \\ c^{\mathrm{T}}A \\ \ldots \\ c^{\mathrm{T}}A^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \ldots \\ x_n(k) \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} d & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ c^{\mathrm{T}}b & d & 0 & \ldots & 0 \\ c^{\mathrm{T}}Ab & c^{\mathrm{T}}b & d & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c^{\mathrm{T}}A^{n-2}b & c^{\mathrm{T}}A^{n-3}b & b & \ldots & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k) \\ u(k+1) \\ u(k+2) \\ \ldots \\ u(k+n-1 \end{bmatrix}, \tag{9.15}$$

или в компактной форме

$$y_n(k) = Q_{\mathrm{P}}x(k) + P_{\mathrm{P}}u_n(k). \tag{9.16}$$

Можно показать, что для линейных систем, для которых справедлив принцип суперпозиции, условия наблюдаемости могут быть сформулированы только с помощью выходов $y_n(k)$.

Если воспользоваться символическими обозначениями определения 2.1, то представление выхода линейных систем имеет вид

$$\eta(t, \varphi(t, \tau, x, \omega)) = \eta(t, \varphi(t; \tau, x, 0)) + \eta(t, \varphi(t; \tau, 0, \omega)), \tag{9.17}$$

где первое слагаемое в правой части определяет выходную компоненту, вызванную начальным состоянием, а второе слагаемое определяет компоненту, вызванную входным сигналом. Следовательно,

$$\begin{aligned}
&\eta(t, \varphi(t; \tau, x_1, \omega)) - \eta(t, \varphi(t; \tau, x_2, \omega)) = \eta(t, \varphi(t; \tau, x_1, 0)) -\\
&- \eta(t, \varphi(t; \tau, x_2, 0)) = \eta(t, \varphi(t; \tau, x_1 - x_2, 0)).
\end{aligned} \tag{9.18}$$

Из соотношения (9.18) следует, что компоненты, соответствующие входу ω, сокращаются, и окончательное выражение для выхода зависит только от разности состояний $x_1 - x_2$. Рассматривая состояние x_1 как начальное состояние и x_2 как конечное состояние и полагая $x_2 = 0$, из выражения (9.18) можно сделать вывод, что в линейном случае начальное состояние можно определить с помощью линейного преобразования будущих значений выхода. В соответствии с этим заключением второе слагаемое в правой части выражения (9.16) можно опустить.

Если матрица Q_{P} невырожденная, то обратная Q_{P}^{-1} существует. Тогда $\det[Q_{\mathrm{P}}] \neq 0$ и строки матрицы Q_{P} линейно независимы. Из уравнения (9.16) тогда следует, что

$$x(k) = Q_{\mathrm{P}}^{-1}y_n(k). \tag{9.19}$$

Таким образом, мы можем определить следующее условие наблюдаемости.

Теорема 9.4. *Линейная система, описываемая уравнениями* (9.1) *и* (9.13), *наблюдаема, если и только если ранг матрицы*

$$Q_P = \begin{bmatrix} c^{\mathrm{T}} \\ c^{\mathrm{T}} A \\ \cdots \\ c^{\mathrm{T}} A^{n-1} \end{bmatrix}$$

равен размерности n пространства состояний.

Выводы о линейной зависимости строк матрицы Q_P аналогичны выводам о столбцах матрицы Q_D, сформулированным в теореме 9.2.

Из уравнения (9.16) можно также получить условия восстанавливаемости, учитывая, что

$$x(k+n) = A^n x(k). \tag{9.20}$$

Уравнение (9.16) с учетом соотношения (9.20) принимает вид

$$y_n(k) = Q_P A^{-n} x(k+n) = Q_K x(k+n), \tag{9.21}$$

где

$$Q_K = \begin{bmatrix} c^{\mathrm{T}} A^{-n} \\ c^{\mathrm{T}} A^{-(n-1)} \\ \cdots \\ c^{\mathrm{T}} A^{-1} \end{bmatrix}, \tag{9.22}$$

$$x(k+n) = Q_K^{-1} y_n(k). \tag{9.23}$$

Условия восстанавливаемости можно сформулировать аналогично условиям наблюдаемости.

Теорема 9.5. *Линейная система, описываемая уравнениями* (9.1) *и* (9.13) *при* $\det[A] \neq 0$, *восстанавливаема, если и только если ранг матрицы*

$$Q_K = \begin{bmatrix} c^{\mathrm{T}} A^{-n} \\ c^{\mathrm{T}} A^{-(n-1)} \\ \cdots \\ c^{\mathrm{T}} A^{-1} \end{bmatrix}$$

равен размерности n пространства состояний.

И снова выводы о линейной зависимости строк матрицы Q_K аналогичны выводам о столбцах матрицы Q_D, сформулированным в теореме 9.2.

В § 7.7 уже отмечалось, что в непрерывных системах с квантующим элементом матрица A невырожденная и, следовательно, в этом случае $\det[A]$ всегда не равен нулю. Если матрицу Q_K умножить справа на матрицу A^n, мы получим матрицу Q_P. Следовательно, если матрица A невырожденная, то условия наблюдаемости и восстанавливаемости эквивалентны.

Если некоторые выходные компоненты системы ненаблюдаемы, но устойчивы, то мы называем такую систему обнаруживаемой. Другими словами, система обнаруживаема, если и только если выходные компоненты (моды), соответствующие неустойчивым собственным значениям матрицы A, наблюдаемы. В соответствии с работами [68.10, 72.5] мы имеем следующее определение.

Определение 9.6. *Пара* (C, A) *системы обнаруживаема, если существует действительная матрица* R *такая, что матрица* $A - RC$ *устойчива, т.е. для всех собственных значений* λ_i *матрицы* $A - RC$ *справедливо условие* $|\lambda_i| < 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Определение 9.6 аналогично определению 9.3, с которым мы познакомились в связи с понятием стабилизируемости. Можно сказать, что в некотором смысле восстанавливаемость является обратным или, другими словами, дуальным свойством по отно-

шению к управляемост
жимости и обнаружива
ти. Таким образом, есл
где индекс "т" обозна
ма Σ_1 восстанавливаем
ма Σ_2 обнаруживаема,
справедливыми, если си

§ 9.3. Идентифицируем

В технической литерату
мических свойств упра
кации. Математические
по измеренным значени
зу, с помощью одношаг
ляющего устройства и
случаях идентификация
бе времени и служит д
управления. В этом слу
ческой модели управля
могут быть использова
устройства или даже д
емого объекта. В любо
ваемым и стабилизиру
управляемого объекта,
Если указанные выше у
ное управление, основан

В §§ 9.1 и 9.2 мы о
определенное внимание

Рассмотрим динамич

$x(k+1) = Ax(k)$.

Это так называемая св
она не подвержена внеш

Предположим, что н
условия, при которых
нии которых можно опр

$x(k+1) = Ax(k)$,

$x(k+2) = Ax(k+1) =$

. . . .

$x(k+n) = Ax(k+n -$

Так как предполагаем
после n шагов составить

$[x(k+1), x(k+2), \ldots$

которая позволяет нам

Теорема 9.6. *Ма*
матрица $[x(k), x(k+1),$

Для краткости запис

Физическая интерпр
должно возбуждать все

§ 9.4. Каноническая де

Стационарные линейны
менных, состоящие из
чае разделить следующи

шению к управляемости; наблюдаемость — дуальное свойство по отношению к достижимости и обнаруживаемость — дуальное свойство по отношению к стабилизируемости. Таким образом, если мы имеем систему $\Sigma_1(A, b, c^{\mathrm{T}}, d)$ и систему $\Sigma_2(A^{\mathrm{T}}, c, b^{\mathrm{T}} d)$, где индекс "т" обозначает транспонирование, то система Σ_2 управляема, если система Σ_1 восстанавливаема, система Σ_2 наблюдаема, если система Σ_1 достижима, система Σ_2 обнаруживаема, если система Σ_1 стабилизируема, и все эти свойства остаются справедливыми, если системы Σ_1 и Σ_2 поменять местами.

§ 9.3. Идентифицируемость

В технической литературе можно найти много различных методов определения динамических свойств управляемых объектов или, иначе, различных методов идентификации. Математические модели линейных объектов в ряде случаев рассчитываются по измеренным значениям входных и выходных переменных реального объекта сразу, с помощью одношаговой процедуры, и это решение применяют для расчета управляющего устройства или, другими словами, для решения задачи синтеза. В других случаях идентификация может быть реализована автоматически в реальном масштабе времени и служит для пересчета управляющих воздействий, т.е. для адаптивного управления. В этом случае отсутствует необходимость в точном оценивании математической модели управляемого объекта, а измеренные входные и выходные переменные могут быть использованы непосредственно для нахождения параметров управляющего устройства или даже для нахождения входных (управляющих) переменных управляемого объекта. В любом случае, однако, управляемый объект должен быть обнаруживаемым и стабилизируемым. Если желательно определить математическую модель управляемого объекта, то такой объект к тому же должен быть идентифицируемым. Если указанные выше условия не выполняются, то невозможно реализовать оптимальное управление, основанное на идентификации объекта.

В §§ 9.1 и 9.2 мы обсуждали некоторые свойства объектов. Полезно также уделить определенное внимание условиям идентифицируемости.

Рассмотрим динамическую систему, описываемую уравнением

$$x(k+1) = Ax(k). \tag{9.24}$$

Это так называемая свободная система, изолированная от внешней среды, и поэтому она не подвержена внешним воздействиям.

Предположим, что начальные условия $x(t)$ известны и система наблюдаема. Найдем условия, при которых система также и идентифицируема, т.е. условия, при выполнении которых можно определить матрицу A. Мы имеем

$$\begin{aligned} x(k+1) &= Ax(k), \\ x(k+2) &= Ax(k+1) = A^2x(k), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x(k+n) &= Ax(k+n-1) = A^n x(k). \end{aligned} \tag{9.25}$$

Так как предполагалось, что все переменные состояния наблюдаемы, то мы можем после n шагов составить матрицу

$$[x(k+1), x(k+2), \ldots, x(k+n)] = A[x(k), x(k+1), \ldots, x(k+n-1)], \tag{9.26}$$

которая позволяет нам определить условия идентификации.

Теорема 9.6. *Матрица A системы* (9.24) *идентифицируема, если и только если матрица* $[x(k), x(k+1), \ldots, x(k+n-1)] \equiv [x(k), Ax(k), \ldots, A^{n-1}x(k)]$ *невырождена.*

Для краткости записи введем обозначение $[x(k), Ax(k), \ldots, A^{n-1}x(k)] = Q_{\mathrm{I}}$.

Физическая интерпретация этого условия означает, что начальное состояние $x(k)$ должно возбуждать все компоненты (моды) системы.

§ 9.4. Каноническая декомпозиция

Стационарные линейные системы с конечным числом независимых выходных переменных, состоящие из отдельных подсистем конечного порядка, можно в общем случае разделить следующим образом на четыре частные системы [63.2, 63.4]:

A. Достижимая и наблюдаемая частная система.

B. Достижимая и ненаблюдаемая частная система.

C. Недостижимая и наблюдаемая частная система.

D. Недостижимая и ненаблюдаемая частная система.

Эта классификация на частные системы показана на рис. 9.1 и называется канонической декомпозицией.

Только достижимая и наблюдаемая частная система может быть описана методами, *основанными на знании входа и выхода системы, например, по реакции на гармоническое воздействие, на импульсное воздействие, на скачок и т.д.* Также только достижимая и наблюдаемая часть такой системы может быть описана математической моделью, которая рассчитана методами идентификации, основанными на измерении входных и выходных переменных состояния системы. Если начальное состояние системы

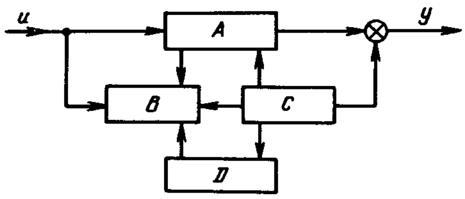


Рис. 9.1. Каноническая декомпозиция системы.

не равно нулю, то измерение выходной переменной y позволяет нам обнаружить неуправляемую часть C. Предположим, что эта частная система устойчива и не подвержена никаким внешним воздействиям.

Рассмотрим дискретную импульсную переходную функцию (7.3)

$$s(k) = \begin{cases} d & \text{при } k = 0, \\ c^{\mathrm{T}} A^{k-1} b & \text{при } k > 0 \end{cases} \tag{9.27}$$

линейной дискретной системы конечной размерности и порядка. Тогда каждая четверка $(A, b, c^{\mathrm{T}}, d)$, которая согласно выражению (9.27) определяет заданную импульсную переходную функцию, называется *реализацией импульсной переходной функции*. Если к тому же матрица A имеет минимальную размерность среди всех возможных реализаций, то четверка $(A, b, c^{\mathrm{T}}, d)$ называется *минимальной реализацией*. Таким образом, минимальный порядок n и константа $d = s(0)$ определяются однозначно. При этом A, b, c зависят от выбранного базиса пространства состояний. Если $(A_1, b_1, c_1^{\mathrm{T}}, d)$ — минимальная реализация, то четверка $(A_2, b_2, c_2^{\mathrm{T}}, d) = (TA_1T^{-1}, Tb_1, c_1^{\mathrm{T}}T^{-1}, d)$, которая получается в результате преобразования четверки $(A_1, b_1, c^{\mathrm{T}}, d)$ с помощью произвольной невырожденной матрицы T, также — минимальная реализация (см. § 10.1).

Если по заданной дискретной импульсной переходной функции (9.27) была определена неминимальная реализация, то она будет содержать, кроме частной системы A, по крайней мере одну из частных систем B, C или D. Однако эти частные системы нельзя определить с помощью измерений входных и выходных переменных, и поэтому мы обычно интересуемся только минимальной реализацией. В этой связи процитируем следующую важную теорему [63.4].

Т е о р е м а 9.7. *Реализация динамической системы минимальна, если и только если она достижима и наблюдаема.*

Из предыдущего следует, что описание динамической системы уравнениями пространства состояний является более общим, чем то, которое следует из измерений входа и выхода системы. Оно может содержать частные системы B, C и D при условии, что они присутствуют в реальной системе, тогда как описание, основанное только на входе и выходе, может содержать только частную систему A.

Следует подчеркнуть, что только частная система A может быть управляемой и, следовательно, при синтезе управления от динамической системы необходимо потребовать достижимости и наблюдаемости. Это приводит к тому, что в действительности ограничиваются только частными системами A. Такой вывод обосновывает приме-

нение в классической тео
измеренных значениях вхо
До сих пор мы рассма
B, C и D, например, управл
получены расчетным путем
описании управляемого о
что ничего не знаем о в
разомкнута или замкнута
подсистем. В этом случае
порядок результирующей
функция линейной систем
щения в передаточной фу
ко тогда, когда возможн
чает, что исходная систем
одну из частных систем B,
Проиллюстрируем тако
функции, соответствующи

$$F_1(z) = \frac{B_1(z)}{(z-\alpha)A_1(z)}, \quad F_2$$

где $B_1(z), B_2(z), B_3(z)$ и
содержат общих сомножит
При последовательном
щая множитель $(z-\alpha)$ (
жима, но ненаблюдаема. Эт
При последовательном
множителем. Эта частная с
ставляет частную систему т
Можно легко показать,
содержащая множитель (z
является частной системой
В заключение следует с
емой подсистем, не обяза
щение в передаточной фу
из указанных свойств. С д
тем — необходимое услови

нение в классической теории управления методов, которые базируются только на измеренных значениях входных и выходных величин.

До сих пор мы рассматривали случаи, когда уравнения состояния частных систем B, C и D, например, управляемого объекта, входящих в математическую модель, были получены расчетным путем и по физическим данным объекта. С другой стороны, при описании управляемого объекта, основанном на его входе и выходе, мы полагали, что ничего не знаем о внутренней структуре объекта. Следует, однако, учитывать, разомкнута или замкнута система управления, которая может состоять из нескольких подсистем. В этом случае, если мы пользуемся описанием в пространстве состояний, порядок результирующей системы равен сумме порядков подсистем. Передаточная функция линейной системы имеет такой же порядок, если только не происходит сокращения в передаточной функции. Минимальная реализация может быть получена только тогда, когда возможно сокращение в передаточной функции. Это, однако, означает, что исходная система должна содержать не только частную систему A, но также одну из частных систем B, C или D.

Проиллюстрируем такой случай на следующем примере. Рассмотрим передаточные функции, соответствующие подсистемам F_1, F_2 и F_3,

$$F_1(z) = \frac{B_1(z)}{(z-\alpha)A_1(z)}, \quad F_2(z) = \frac{(z-\alpha)B_2(z)}{A_2(z)}, \quad F_3(z) = \frac{B_3(z)}{(z-\alpha)A_3(z)}, \tag{9.28}$$

где $B_1(z), B_2(z), B_3(z)$ и $A_1(z), A_2(z), A_3(z)$ — полиномы, любые два из которых не содержат общих сомножителей и ни один из которых не содержит множитель $(z-\alpha)$.

При последовательном соединении $F_1 \to F_2$ образуется частная система, содержащая множитель $(z-\alpha)$ (с собственным значением $z_1 = \alpha$). Эта частная система достижима, но ненаблюдаема. Это, следовательно, частная система типа B.

При последовательном соединении $F_2 \to F_1$ образуется частная система с тем же множителем. Эта частная система наблюдаема, но недостижима, и следовательно, представляет частную систему типа C.

Можно легко показать, что при параллельном соединении $F_1 \uparrow\uparrow F_3$ частная система, содержащая множитель $(z-\alpha)$, и недостижима, и неуправляема. Она, следовательно, является частной системой типа D.

В заключение следует отметить, что система, состоящая из достижимой и наблюдаемой подсистем, не обязательно достижима и наблюдаема. Если происходит сокращение в передаточной функции всей системы, то такая система теряет одно или оба из указанных свойств. С другой стороны, достижимость и наблюдаемость всех подсистем — необходимое условие достижимости и наблюдаемости всей системы.