Глава 6

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОБЫКНОВЕННОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ УРАВНЕНИЯМИ СОСТОЯНИЯ

§ 6.1. Объект с одним входом и одним выходом

6.1.1. Процедура I — переменные состояния определяются соотношением $x_i(k+1) = x_{i+1}(k)$. В дискретном варианте вывода уравнений состояния отдельных частей замкнутой системы управления, описываемых линейными разностными уравнениями с постоянными коэффициентами, мы должны различать случаи функционирования отдельных частей в дискретном времени и функционирования отдельных частей в непрерывном времени. Обозначив входную переменную контура управления через u и выходную переменную через y, можно записать соответствующее разностное уравнение в виде

$$a_n y(k-n) + a_{n-1} y(k-n+1) + \ldots + a_1 y(k-1) + a_0 y(k) =$$
$$= b_0 u(k) + b_1 u(k-1) + \ldots + b_n u(k-n). \qquad (6.1)$$

В случае, когда отдельные части контура управления, реализуемые, например, с помощью ЦВМ, функционируют в дискретном времени, коэффициент b_0 может отличаться от нуля, тогда как в случае непрерывных элементов этот коэффициент всегда должен равняться нулю, за исключением простейшего случая объекта нулевого порядка.

В уравнении (6.1) для краткости записи был выбран единичный период квантования. В общем же случае вместо $y(k-i)$ следует писать $y[T(k-i)]$. Введем оператор запаздывания E^{-i} на i периодов квантования:

$$E^{-i}[y(k)] = y(k-i). \qquad (6.2)$$

С учетом обозначения (6.2) уравнение (6.1) можно записать в виде

$$\sum_{i=0}^{n} a_i E^{-i}[y(k)] = \sum_{i=0}^{n} b_i E^{-i}[u(k)], \qquad (6.3)$$

$$\hat{A} y(k) = \hat{B} u(k), \qquad (6.4)$$

где, очевидно,

$$\hat{A} = \sum_{i=0}^{n} a_i E^{-i} \quad \text{и} \quad \hat{B} = \sum_{i=0}^{n} b_i E^{-i}. \qquad (6.5)$$

Как и в п. 3.2.1, мы можем представить уравнение (6.4) двумя соотношениями

$$\hat{A} x(k) = u(k), \qquad (6.6)$$

$$\hat{B} x(k) = y(k). \qquad (6.7)$$

Введя переменные состояния

$$x(k-n) = x_1(k),$$
$$x(k-n+1) = x_1(k+1) = x_2(k),$$
$$x(k-n+2) = x_2(k+1) = x_3(k), \qquad (6.8)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x(k-1) = x_{n-1}(k+1) = x_n(k),$$
$$x(k) = x_n(k+1), \qquad (6.9)$$

мы можем записать урав

$$x_n(k+1) = \frac{1}{a_0}\,[u(k) -$$

Выражение (6.7) для пе
принимает вид

$$y(k) = b_0 x_n(k+1) + b_1$$

Подставляя выражение (

$$y(k) = \frac{b_0}{a_0}\,[u(k) - a_1 x$$
$$+ b_1 x_n(k) + \ldots + b_n x$$
$$y(k) = \frac{b_0}{a_0} u(k) + \Big(b_1$$
$$\ldots + \Big(b_n - \frac{b_0 a_n}{a_0}\Big) x$$

Уравнения (6.8) и (6.10)

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \ldots\ldots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ -\frac{a_n}{a_0} \end{bmatrix}$$

а уравнение (6.13) опре

$$y(k) = \Big[\Big(b_0 - \frac{b_0 a_n}{a_0}\Big)$$

Оба уравнения могут бы

$$x(k+1) = Ax(k) + bu(k$$
$$y(k) = c^{\mathrm{T}} x(k) + du(k).$$

Структуры отдельны
из сравнения этих урав
объекта, для которого b
уравнений (6.14) и (6.
сообразно положить a_0

Далее, как и в случа
состояния (6.16) и (6.1
A — матрица динамики,
ца-строка выхода (матр
циент входа). Термины

П р и м е р 6.1. Перед
жением

$$P(z) = \frac{E_2(z)}{E_1(z)} = \frac{2 + 3{,}6z}{1 + 0{,}7z}$$

Определить соответствующ

Решение. Мы преобразу
нению (6.1):

$$0{,}1 e_2(k-2) + 0{,}7 e_2(k -$$

ГО УРАВНЕНИЯ

тношением x_i $(k + 1)$ =
отдельных частей замк-
ыми уравнениями с по-
нкционирования отдель-
ьных частей в непрерыв-
ения через u и выходную
стное уравнение в виде

(6.1)

зуемые, например, с по-
иент b_0 может отличать-
ффициент всегда должен
улевого порядка.
ый период квантования.
. Введем оператор запаз-

(6.2)

иде

(6.3)

(6.4)

(6.5)

соотношениями

(6.6)

(6.7)

(6.8)

(6.9)

мы можем записать уравнение (6.6) в виде

$$x_n(k+1)=\frac{1}{a_0}\,[u(k)-a_1x_n(k)-a_2x_{n-1}(k)-\ \dots\ -a_nx_1(k)],\qquad a_0\neq 0. \tag{6.10}$$

Выражение (6.7) для переменных состояния, задаваемых соотношениями (6.8) и (6.9), принимает вид

$$y(k)=b_0x_n(k+1)+b_1x_n(k)+\dots+b_nx_1(k). \tag{6.11}$$

Подставляя выражение (6.10) в уравнение (6.11), получим

$$y(k)=\frac{b_0}{a_0}\,[u(k)-a_1x_n(k)-a_2x_{n-1}(k)-\ \dots\ -a_nx_1(k)]+ \\ +b_1x_n(k)+\ \dots\ +b_nx_1(k), \tag{6.12}$$

$$y(k)=\frac{b_0}{a_0}\,u(k)+\left(b_1-\frac{b_0a_1}{a_0}\right)x_n(k)+\left(b_2-\frac{b_0a_2}{a_0}\right)x_{n-1}(k)+\ \dots \\ \dots\ +\left(b_n-\frac{b_0a_n}{a_0}\right)x_1(k). \tag{6.13}$$

Уравнения (6.8) и (6.10) определяют первое уравнение состояния

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1)\\ x_2(k+1)\\ \dots\dots\\ x_n(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0\ \dots & 0\\ 0 & 0 & 1\ \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ -\dfrac{a_n}{a_0} & -\dfrac{a_{n-1}}{a_0} & \dots & -\dfrac{a_1}{a_0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1(k)\\ x_2(k)\\ \dots\\ x_n(k)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0\\ 0\\ \dots\\ \dfrac{1}{a_0}\end{bmatrix}u(k), \tag{6.14}$$

а уравнение (6.13) определяет второе уравнение состояния

$$y(k)=\left[\left(b_0-\frac{b_0a_n}{a_0}\right),\ \dots,\ \left(b_1-\frac{b_0a_1}{a_0}\right)\right]\ [x_1(k),\dots,x_n(k)]^{\mathrm T}+\frac{b_0}{a_0}\,u(k). \tag{6.15}$$

Оба уравнения могут быть кратко записаны следующим образом:

$$x(k+1)=Ax(k)+bu(k), \tag{6.16}$$

$$y(k)=c^{\mathrm T}x(k)+du(k). \tag{6.17}$$

Структуры отдельных матричных операторов и векторов в (6.16) и (6.17) следуют из сравнения этих уравнений с уравнениями (6.14) и (6.15). В случае управляемого объекта, для которого $b_0 = 0$, уравнение состояния (6.15) упрощается. Из рассмотрения уравнений (6.14) и (6.15) следует, что в исходном разностном уравнении (6.1) целесообразно положить $a_0 = 1$. Блок-схема уравнений состояния показана на рис. 6.1.

Далее, как и в случае непрерывных систем, мы будем называть первое из уравнений состояния (6.16) и (6.17) уравнением динамики, а второе – уравнением выхода. Тогда A – *матрица динамики*, $b(B)$ – *матрица-столбец входа* (*матрица входа*), $c^{\mathrm T}(C)$ – *матрица-строка выхода* (*матрица выхода*) и $d(D)$ – *коэффициент входа* (*матричный коэффициент входа*). Термины в скобках соответствуют многомерным системам.

Пример 6.1. Передаточная функция цифрового корректирующего устройства задана выражением

$$P(z)=\frac{E_2(z)}{E_1(z)}=\frac{2+3{,}6z^{-1}-0{,}8z^{-2}}{1+0{,}7z^{-1}+0{,}1z^{-2}}.$$

Определить соответствующие уравнения состояния.

Решение. Мы преобразуем заданную передаточную функцию к виду, соответствующему уравнению (6.1):

$$0{,}1e_2(k-2)+0{,}7e_2(k-1)+e_2(k)=2e_1(k)+3{,}6e_1(k-1)-0{,}8e_1(k-2).$$

3*

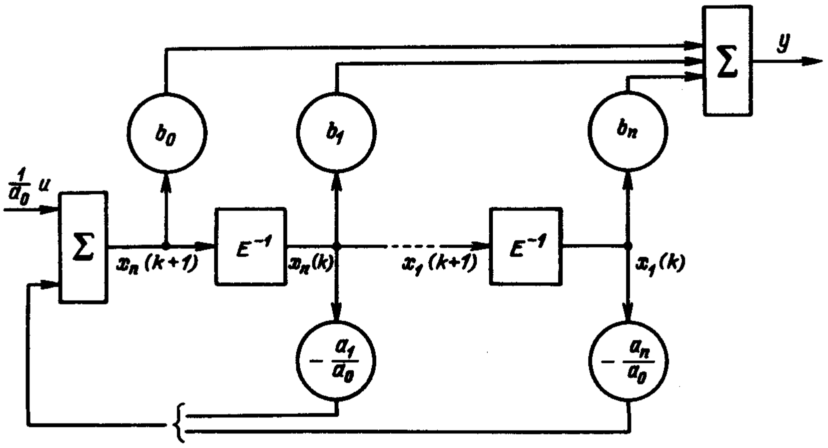


Рис. 6.1. Блок-схема, соответствующая уравнениям состояния (6.14) и (6.15).

Первое уравнение состояния соответствует уравнению (6.14):

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0{,}1 & -0{,}7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(k),$$

а второе уравнение соответствует уравнению (6.15):

$$y(k) = [-1, 2, 2]\ [x_1(k), x_2(k)]^{\mathrm{T}} + 2u(k).$$

6.1.2. Процедура II — переменные состояния — линейная комбинация значений входа и выхода объекта. Запишем уравнение (6.1) в виде

$$a_n y(k) + a_{n-1} y(k+1) + \ldots + a_1 y(k+n-1) + a_0 y(k+n) =$$
$$= b_0 u(k+n) + b_1 u(k+n-1) + \ldots + b_n u(k) \tag{6.18}$$

и введем переменные состояния

$$x_1(k) = a_0 y(k) - b_0 u(k), \tag{6.19}$$

$$\begin{aligned} &x_2(k) = a_1 y(k) + a_0 y(k+1) - b_0 u(k+1) - b_1 u(k), \\ &x_3(k) = a_2 y(k) + a_1 y(k+1) + a_0 y(k+2) - b_0 u(k+2) - b_1 u(k+1) - b_2 u(k), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &x_n(k) = a_{n-1} y(k) + a_{n-2} y(k+1) + \ldots + a_0 y(k+n-1) - \ldots \\ &- b_0 u(k+n-1) - \ldots - b_{n-2} u(k+1) - b_{n-1} u(k). \end{aligned} \tag{6.20}$$

Вычислим $y(k)$ из уравнения (6.19), подставим полученное значение во все уравнения (6.20) и заменим в этих уравнениях все члены, содержащие $y(k+i)$ и $u(k+i)$, $i = 1, 2, \ldots, k+n-1$, на переменные состояния $x_\nu(k+1)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$. Тогда получим

$$y(k) = \frac{1}{a_0} x_1(k) + \frac{b_0}{a_0} u(k), \tag{6.21}$$

$$\begin{aligned} &x_2(k) = \frac{a_1}{a_0} x_1(k) + x_1(k+1) - \left(b_1 - \frac{a_1}{a_0} b_0\right) u(k), \\ &x_3(k) = \frac{a_2}{a_0} x_1(k) + x_2(k+1) - \left(b_2 - \frac{a_2}{a_0} b_0\right) u_k, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &x_n(k) = \frac{a_{n-1}}{a_0} x_1(k) + x_{n-1}(k+1) - \left(b_{n-1} - \frac{a_{n-1}}{a_0} b_0\right) u(k). \end{aligned} \tag{6.22}$$

Исходное разностно
переменных состояния

$$0 = \frac{a_n}{a_0} x_1(k) + x_n(k$$

Уравнения (6.22) и (6.2

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \ldots\ldots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{a}{a} \\ -\frac{a_2}{a} \\ \ldots \\ -\frac{a_n}{a_0} \end{bmatrix}$$

Второе уравнение сост
форма уравнений (6.24)

$$x(k+1) = Ax(k) + bu($$

где структура отдельн
уравнений (6.25) с ур
$c^{\mathrm{T}} = [1/a_0, 0, \ldots, 0]$ и
Из этих уравнений такж
образно положить $a_0 =$

Пример 6.2. Определ
Решение. В соответствии

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}7 \\ -0{,}1 \end{bmatrix}$$

$$y(k) = x_1(k) + 2u(k).$$

Пример 6.3. Дискрет
дана выражением

$$G_1(z) = \frac{0{,}1306z^{-1} +}{1 - 2{,}2130z^{-1} +}$$

Контур управления содерж
с управляющим устройств
$u(k) = 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

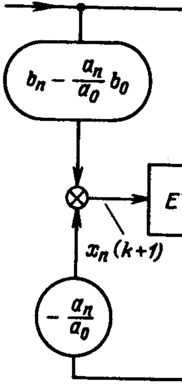
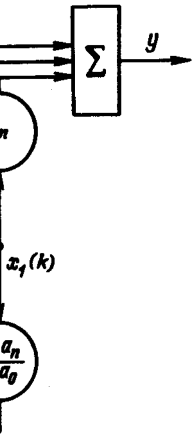


Рис. 6.2. Блок-схе



я (6.14) и (6.15).

мбинация значений входа

(6.18)

(6.19)

$1) - b_2u(k),$ (6.20)

. . . .

начение во все уравнения $y(k+i)$ и $u(k+i)$, $i =$ $= 1, 2, \dots, n-1$. Тогда

(6.21)

(6.22)

).

Исходное разностное уравнение (6.18) может быть теперь записано с помощью переменных состояния следующим образом:

$$0 = \frac{a_n}{a_0} x_1(k) + x_n(k+1) - \left(b_n - \frac{a_n}{a_0} b_0\right) u(k). \tag{6.23}$$

Уравнения (6.22) и (6.23) определяют первое уравнение состояния

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \dots\dots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{a_1}{a_0} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{a_2}{a_0} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_n}{a_0} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \dots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 - \frac{a_1}{a_0} b_0 \\ b_2 - \frac{a_2}{a_0} b_0 \\ \dots\dots \\ b_n - \frac{a_n}{a_0} b_0 \end{bmatrix} u(k). \tag{6.24}$$

Второе уравнение состояния определяется уравнением (6.21). Векторно-матричная форма уравнений (6.24) и (6.21) имеет вид

$$x(k+1) = Ax(k) + bu(k), \qquad y(k) = c^{\mathrm{T}} x(k) + du(k), \tag{6.25}$$

где структура отдельных матричных операторов и векторов следует из сравнения уравнений (6.25) с уравнениями (6.24) и (6.21). Отметим для полноты, что здесь $c^{\mathrm{T}} = [1/a_0, 0, \dots, 0]$ и $d = b_0/a_0$. При $b = 0$ уравнения (6.24) и (6.21) упрощаются. Из этих уравнений также следует, что в исходном разностном уравнении (6.18) целесообразно положить $a_0 = 1$. Блок-схема уравнений состояния показана на рис. 6.2.

Пример 6.2. Определить уравнения состояния, соответствующие примеру 6.1.
Решение. В соответствии с уравнениями (6.24) и (6.25) имеем:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}7 & 1 \\ -0{,}1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2{,}2 \\ -1 \end{bmatrix} u(k),$$

$$y(k) = x_1(k) + 2u(k).$$

Пример 6.3. Дискретная передаточная функция непрерывной части контура управления задана выражением

$$G_1(z) = \frac{0{,}1306z^{-1} + 0{,}4094z^{-2} + 0{,}0792z^{-3}}{1 - 2{,}2130z^{-1} + 1{,}5809z^{-2} - 0{,}3679z^{-3}}.$$

Контур управления содержит в себе экстраполятор нулевого порядка, интегрирующий сервомотор с управляющим устройством и управляемый объект. Рассчитать реакцию на единичный скачок $u(k) = 1$, $k = 0, 1, 2, \dots$

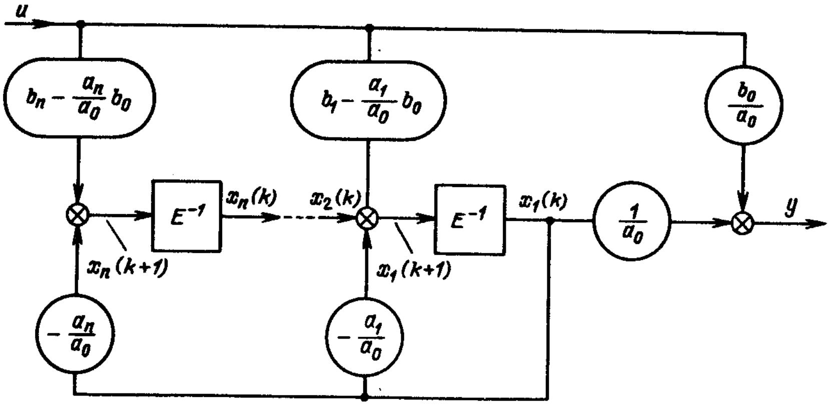


Рис. 6.2. Блок-схема, соответствующая уравнениям состояния (6.21) и (6.24).

Решение. Задача может быть решена умножением передаточной функции $G_1(z)$ на z-преобразование единичного сигнала $U(z) = 1/(1 - z^{-1})$ с последующим делением соответствующих полиномов. Другой путь решения задачи заключается в записи уравнений состояния в соответствии с уравнениями (6.25) и в последующем расчете реакции на ЦВМ:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}2130 & 1 & 0 \\ -1{,}5809 & 0 & 1 \\ 0{,}3679 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}1306 \\ 0{,}4094 \\ 0{,}0792 \end{bmatrix} u(k),$$

$$y(k) = x_1(k).$$

При $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0$ имеем:

k	0	1	2	3	4	5
$y(k)$	0	0,1306	0,8290	2,2474	4,3300	6,9537

6.1.3. Уравнения состояния дискретного объекта при воздействии управляющих и возмущающих переменных. Разностное уравнение объекта с управляющей u и возмущающей w переменными, воздействующими на его вход, записывается аналогично уравнению (6.18) в виде

$$\sum_{i=0}^{n} a_{n-i} y(k+i) = \sum_{i=0}^{n} b_{n-i} u(k+i) + \sum_{i=0}^{n} c_{n-i} w(k-i). \tag{6.26}$$

Как и в п. 6.1.2, мы приходим к решению

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \cdots\cdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{a_1}{a_0} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\dfrac{a_2}{a_0} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\dfrac{a_n}{a_0} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \cdots \\ x_n(k) \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} b_1 - \dfrac{a_1}{a_0} b_0 & c_1 - \dfrac{a_1}{a_0} c_0 \\ b_2 - \dfrac{a_2}{a_0} b_0 & c_2 - \dfrac{a_2}{a_0} c_0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ b_n - \dfrac{a_n}{a_0} b_0 & c_n - \dfrac{a_n}{a_0} c_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(k) \\ w(k) \end{bmatrix}, \tag{6.27}$$

$$y(k) = \frac{1}{a_0} x_1(k) + \frac{b_0}{a_0} u(k) + \frac{c_0}{a_0} w(k). \tag{6.28}$$

Переменные состояния определяются следующим образом:

$$x_1(k) = a_0 y(k) - b_0 u(k) - c_0 w(k), \tag{6.29}$$

$$x_2(k) = a_1 y(k) + x_1(k+1) - b_1 u(k) - c_1 w(k),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n(k) = a_{n-1} y(k) + x_{n-1}(k+1) - b_{n-1} u(k) - c_{n-1} w(k). \tag{6.30}$$

Уравнение (6.26) при переменных состояния, задаваемых выражениями (6.29) и (6.30), принимает вид

$$0 = a_n y(k) + x_n(k+1) - b_n u(k) - c_n w(k). \tag{6.31}$$

§ 6.2. Объект со многим

Поведение дискретного
входами и многими вы
уравнений с постоянны

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(E) y_j(k) = \sum_{j=1}^{N}$$

В уравнении (6.32) чи
менных, $a_{ij}(E)$ и $b_{ij}(E)$
рый определен равенст
матричной форме

$$A^*(E) y(k) = B^*(E) u(k$$

где $A^*(E)$ и $B^*(E)$ – ма
ственно. Представим м
торы E в соответствую

$$(A_n^* + A_{n-1}^* E + \dots +$$

$$= (B_0^* E^n + B_1^* E^{n-1} +$$

Уравнение (6.34) анало
(6.34) вместо констант
$i, j = 1, 2, \dots, N$, а вмест

Введя векторы перем

$$x_\nu^{\text{т}} = [x_{\nu 1}, x_{\nu 2}, \dots, x_{\nu}$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \cdots\cdots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \\ - \\ \cdot\cdot \\ - \end{bmatrix}$$

где

$$A_l = A_l^* A_0^{*-1}, \quad l = 1$$

$$B_l = B_l^* - A_l^* A_0^{*-1} B_0^*,$$

$$y(k) = A_0^{*-1} x_1(k) + A$$

В уравнениях состояния

$$u^{\text{т}}(k) = [u_1(k), \dots, u$$

Из выражений (6.36) –
вать уравнения (6.32)
дена. Если эта матрица
Как и в § 3.3, мы приве

Поскольку при невы
кой в уравнения (6.35)
матрицей A_0^*.

Пример 6.4. Объект

$$0{,}1 y_1(k-2) + 0{,}7 y_1(\dot{k} -$$

$$= -0{,}5 u_1(k-1) + 0{,}6 u_1$$

$$0{,}3 y_1(k-2) - 1{,}1 y_1(k -$$

$$= -4 u_1(k-1) + 2 u_1(k -$$

Определить соответствующ

кции $G_1(z)$ на z-преобразова-
ответствующих полиномов.
в соответствии с уравнения-

действии управляющих и
управляющей u и возму-
ывается аналогично урав-

(6.26)

(6.27)

(6.28)

(6.29)

(6.30)

ажениями (6.29) и (6.30),

(6.31)

---

§ 6.2. Объект со многими входами и многими выходами

Поведение дискретного линейного стационарного управляемого объекта со многими входами и многими выходами описывается следующей системой линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\sum_{j=1}^{N} a_{ij}(E)y_j(k) = \sum_{j=1}^{N} b_{ij}(E)u_j(k), \qquad i = 1, 2, \ldots, N. \tag{6.32}$$

В уравнении (6.32) число управляющих переменных равно числу управляемых переменных, $a_{ij}(E)$ и $b_{ij}(E)$ — полиномы n_{ij}-го порядка по E и E — оператор сдвига, который определен равенством (6.2). Система уравнений (6.32) может быть записана в матричной форме

$$A^*(E)y(k) = B^*(E)u(k), \tag{6.33}$$

где $A^*(E)$ и $B^*(E)$ — матрицы с элементами $a_{ij}(E)$ и $b_{ij}(E)$, $i, j = 1, 2, \ldots, N$, соответственно. Представим матрицы $A^*(E)$ и $B^*(E)$ суммой матриц, умноженных на операторы E в соответствующей степени:

$$(A_n^* + A_{n-1}^*E + \ldots + A_1^*E^{n-1} + A_0E^n)y(k) =$$
$$= (B_0^*E^n + B_1^*E^{n-1} + \ldots + B_{n-1}^*E + B_n^*)u(k). \tag{6.34}$$

Уравнение (6.34) аналогично уравнению (6.18), за исключением того, что в уравнении (6.34) вместо констант a_ν и b_ν — матрицы A_ν^* и B_ν^*, $\nu = 0, 1, 2, \ldots, n$, $n = \max(n_{ij})$, $i, j = 1, 2, \ldots, N$, а вместо переменных y и u — векторы y и u.

Введя векторы переменных состояния, мы получим аналогично п. 6.1.2 соотношения

$$x_\nu^{\mathrm{T}} = [x_{\nu 1}, x_{\nu 2}, \ldots, x_{\nu N}], \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ \ldots\ldots \\ x_n(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A_1 & E & 0 & \ldots & 0 \\ -A_2 & 0 & E & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ -A_n & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ \ldots \\ x_n(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \ldots \\ B_n \end{bmatrix} u(k), \tag{6.35}$$

где

$$A_l = A_l^* A_0^{*-1}, \qquad l = 1, 2, \ldots, n, \tag{6.36}$$

$$B_l = B_l^* - A_l^* A_0^{*-1} B_0^*, \qquad l = 1, 2, \ldots, n, \tag{6.37}$$

$$y(k) = A_0^{*-1}x_1(k) + A_0^{*-1}B_0^*u(k). \tag{6.38}$$

В уравнениях состояния (6.35) и (6.38)

$$u^{\mathrm{T}}(k) = [u_1(k), \ldots, u_N(k)] \quad \text{и} \quad y^{\mathrm{T}}(k) = [y_1(k), \ldots, y_N(k)].$$

Из выражений (6.36) — (6.38) следует, что изложенная методика позволяет преобразовать уравнения (6.32) в уравнения состояния только тогда, когда матрица A_0^* невырождена. Если эта матрица вырождена, то уравнение состояния все же может существовать. Как и в § 3.3, мы приведем здесь только один пример без явного решения.

Поскольку при невырожденной матрице A_0^* решение получается простой подстановкой в уравнения (6.35) и (6.38), то ниже приводится только пример с вырожденной матрицей A_0^*.

Пример 6.4. Объект с двумя входами и выходами задан разностными уравнениями

$$0{,}1y_1(k-2) + 0{,}7y_1(k-1) + y_1(k) - 0{,}09y_2(k-2) + y_2(k) =$$
$$= -0{,}5u_1(k-1) + 0{,}6u_1(k-2) - 2u_2(k-1) + u_2(k-2),$$
$$0{,}3y_1(k-2) - 1{,}1y_1(k-1) + y_1(k) + 0{,}2y_2(k-1) + y_2(k) =$$
$$= -4u_1(k-1) + 2u_1(k-2) - 0{,}2u_2(k-1) - 0{,}5u_2(k-2).$$

Определить соответствующие уравнения состояния.

Решение. В соответствии с заданными разностными уравнениями матрица

$$A_0^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

является вырожденной матрицей, так что уравнения (6.35) и (6.38) применить нельзя. Представление заданной системы разностных уравнений уравнениями состояния может быть, однако, получено исключением переменных $y_1(k)$ и $y_2(k)$ из уравнений, которые определяют переменные состояния

$$x_1(k) = A_0^* y(k),$$

$$x_2(k) = A_1^* y(k) + x_1(k+1) - B_1^* u(k), \tag{6.39}$$

и из исходной системы разностных уравнений, представленных с помощью введенных переменных состояния

$$0 = A_2^* y(k) + x_2(k+1) - B_2^* u(k). \tag{6.40}$$

Из первого уравнения системы уравнений (6.39) следует

$$\begin{bmatrix} x_{11}(k) \\ x_{12}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix}, \qquad x_{11}(k) = y_1(k) + y_2(k) = x_{12}(k). \tag{6.41}$$

Из второго уравнения системы (6.39) мы получим

$$\begin{bmatrix} x_{21}(k) \\ x_{22}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,7 & 0 \\ -1,1 & 0,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{11}(k+1) \\ x_{11}(k+1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,5 & 2 \\ 4 & 0,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix},$$

$$x_{21}(k) = 0,7y_1(k) + x_{11}(k+1) + 0,5u_1(k) + 2u_2(k), \tag{6.42}$$

$$x_{22}(k) = -1,1y_1(k) + 0,2y_2(k) + x_{11}(k+1) + 4u_1(k) + 0,2u_2(k).$$

Вычитая уравнения (6.42) друг из друга, мы исключим $x_{11}(k+1)$ и получим

$$x_{21}(k) - x_{22}(k) = 1,8y_1(k) - 0,2y_2(k) - 3,5u_1(k) + 1,8u_2(k). \tag{6.43}$$

Из уравнений (6.41) и (6.43) мы теперь определим $y_1(k)$ и $y_2(k)$:

$$y_1(k) = 0,1x_{11}(k) + 0,5x_{21}(k) - 0,5x_{22}(k) + 1,75u_1(k) - 0,9u_2(k),$$

$$y_2(k) = 0,9x_{11}(k) - 0,5x_{21}(k) + 0,5x_{22}(k) - 1,75u_1(k) - 0,9u_2(k). \tag{6.44}$$

В подробных обозначениях уравнение (6.40) имеет вид

$$0 = \begin{bmatrix} 0,1 & -0,09 \\ 0,3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{21}(k+1) \\ x_{22}(k+1) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,6 & 1 \\ 2 & -0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix},$$

$$0 = 0,1y_1(k) - 0,09y_2(k) + x_{21}(k+1) - 0,6u_1(k) - u_2(k), \tag{6.45}$$

$$0 = 0,3y_1(k) + x_{22}(k+1) - 2u_1(k) + 0,5u_2(k).$$

Если мы теперь подставим в любое из уравнений (6.42) и (6.45) значения $y_1(k)$ и $y_2(k)$ из (6.44), мы сможем явно определить $x_{11}(k+1)$, $x_{21}(k+1)$ и $x_{22}(k+1)$ и получить первое уравнение состояния

$$\begin{bmatrix} x_{11}(k+1) \\ x_{21}(k+1) \\ x_{22}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,07 & 0,65 & 0,35 \\ 0,071 & -0,095 & 0,095 \\ -0,03 & -0,15 & 0,15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11}(k) \\ x_{21}(k) \\ x_{22}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1,725 & -1,37 \\ 0,2675 & 1,171 \\ 1,475 & -0,23 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}. \tag{6.46}$$

Второе уравнение состояния, выражающее преобразование переменных состояния в переменные $y_1(k)$ и $y_2(k)$, определяется с помощью соотношения (6.44):

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,5 & -0,5 \\ 0,9 & -0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11}(k) \\ x_{21}(k) \\ x_{22}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1,75 & -0,9 \\ -1,75 & 0,9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}. \tag{6.47}$$

РЕШЕНИЕ УРАВНЕ

§ 7.1. Решение во врем

Рассмотрим уравнение

$x(k+1) = Ax(k) + Bu$

где A и B — постоянны
ный вектор $x(0)$ и вхо
ные $w(k)$, известны.

С помощью уравнени

$x(1) = Ax(0) + Bu(0)$

$x(2) = Ax(1) + Bu(1)$

$x(3) = Ax(2) + Bu(2)$

$+ABu(1) + Bu(2) + A$

и для любого k имеем

$x(k) = A^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1}$

$= A^k x(0) + \sum_{r=0}^{k-1} A^{k-}$

Выходная переменная

$y(k) = Cx(k) + Du(k),$

так что совместно с урав

$y(k) = CA^k x(0) + \sum_{j=0}^{k-1}$

$= CA^k x(0) + \sum_{j=1}^{k} CA^{j-}$

$= CA^k x(0) + \sum_{r=0}^{k-1} CA^k$

При выводе соотношени

При $x(0) = 0$, $w(r) =$
следует формула для
одним выходом. В этом
с уравнениями (6.16) и

$s(k) = \begin{cases} d & \text{п} \\ c^{\text{т}} A^{k-1} b & \text{п} \end{cases}$

рименить нельзя. Представле-
ожет быть, однако, получено
еляют переменные состояния

(6.39)

ощью введенных переменных

(6.40)

$). \quad (6.41)$

$\begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix},$

(6.42)

лучим

(6.43)

(6.44)

$\begin{matrix} k) \\ k) \end{bmatrix},$

(6.45)

я $y_1(k)$ и $y_2(k)$ из (6.44),
ить первое уравнение сос-

$\begin{matrix} -1{,}37 \\ 1{,}171 \\ -0{,}23 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix}. \quad (6.46)$

х состояния в переменные

$\begin{matrix}) \\ ) \end{bmatrix}. \quad (6.47)$

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ В ДИСКРЕТНОМ ВРЕМЕНИ

§ 7.1. Решение во временной области

Рассмотрим уравнение состояния дискретного объекта

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + w(k),$$

где A и B — постоянные матрицы размерности $(n;\ n)$ и $(n;\ r)$ соответственно. Начальный вектор $x(0)$ и входные сигналы, т.е. управляющие $u(k)$ и возмущающие переменные $w(k)$, известны.

С помощью уравнения состояния мы находим

$$x(1) = Ax(0) + Bu(0) + w(0),$$

$$x(2) = Ax(1) + Bu(1) + w(1) = A^2x(0) + ABu(0) + Bu(1) + Aw(0) + w(1),$$

$$x(3) = Ax(2) + Bu(2) + w(2) = A^3x(0) + A^2Bu(0) +$$

$$+ ABu(1) + Bu(2) + A^2w(0) + Aw(1) + w(2)$$

и для любого k имеем

$$x(k) = A^kx(0) + \sum_{j=0}^{k-1} A^jBu(k-j-1) + \sum_{j=0}^{k-1} A^jw(k-j-1) =$$

$$= A^kx(0) + \sum_{r=0}^{k-1} A^{k-r-1}[Bu(r) + w(r)]. \tag{7.1}$$

Выходная переменная

$$y(k) = Cx(k) + Du(k),$$

так что совместно с уравнением (7.1)

$$y(k) = CA^kx(0) + \sum_{j=0}^{k-1} CA^jBu(k-j-1) + \sum_{j=0}^{k-1} CA^jw(k-j-1) + Du(k) =$$

$$= CA^kx(0) + \sum_{j=1}^{k} CA^{j-1}[Bu(k-j) + w(k-j)] + Du(k) =$$

$$= CA^kx(0) + \sum_{r=0}^{k-1} CA^{k-r-1}[Bu(r) + w(r)] + Du(k). \tag{7.2}$$

При выводе соотношения (7.2) была проведена подстановка $j = k - r - 1$.

При $x(0) = 0$, $w(r) = 0$, $r \geqslant 0$, $u(0) = 1$ и $u(r) = 0, r > 0$, из соотношения (7.2) следует формула для импульсной переходной функции объекта с одним входом и одним выходом. В этом случае матрицы B, C и D заменяются на b, c^{T} и d в соответствии с уравнениями (6.16) и (6.17). Тогда импульсная переходная функция

$$s(k) = \begin{cases} d & \text{при } k = 0, \\ c^{\mathrm{T}}A^{k-1}b & \text{при } k > 0. \end{cases} \tag{7.3}$$

§ 7.2. Весовая матрица

Если мы знаем дискретные значения импульсной переходной функции объекта $s(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, и управляющей переменной $u(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, то с помощью свертки мы можем вычислить значения реакции объекта при каждом значении k:

$$y(k) = \sum_{l=0}^{k} s(k-l)u(l) \tag{7.4}$$

или

$$y(k) = \sum_{l=0}^{k} s(l)u(k-l) = \sum_{l=1}^{k} s(l)u(k-l) + s(0)u(k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

Для импульсной переходной функции мы имеем

$$s(k) = \begin{cases} s(0) & \text{при} \quad k = 0, \\ s(k) & \text{при} \quad k > 0. \end{cases}$$

Из сравнения предыдущего соотношения для импульсной переходной функции с соотношением (7.3) следует

$$s(k) = \begin{cases} s(0) = d & \text{при} \quad k = 0, \\ s(k) = c^{\mathrm{T}}A^{k-1}b & \text{при} \quad k > 0. \end{cases} \tag{7.5}$$

Соотношение (7.4) применяется для одномерных y и u. Для объектов с векторами y и u размерности p и r соответственно соотношение (7.4) принимает вид:

$$y_i(k) = \sum_{l=0}^{k} \sum_{j=1}^{r} s_{ij}(k-l)u_j(l), \quad i = 1, 2, \ldots, p, \tag{7.6}$$

или в матричной форме

$$y(k) = \sum_{l=0}^{k} S(k-l)u(l),$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ \ldots \\ y_p(k) \end{bmatrix} = \sum_{l=0}^{k} \begin{bmatrix} s_{11}(k-l) & s_{12}(k-l) & \ldots & s_{1r}(k-l) \\ s_{21}(k-l) & s_{22}(k-l) & \ldots & s_{2r}(k-l) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{p1}(k-l) & s_{p2}(k-l) & \ldots & s_{pr}(k-l) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(l) \\ u_2(l) \\ \ldots \\ u_r(l) \end{bmatrix}, \tag{7.7}$$

где элементами матрицы $S(k-l)$ являются $s_{ij}(k-l)$, $i = 1, 2, \ldots, p$, и $j = 1, 2, \ldots, r$.

Соотношение (7.4) может быть записано также в виде

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ \ldots \\ y(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s(0) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ s(1) & s(0) & 0 & \ldots & 0 \\ s(2) & s(1) & s(0) & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s(k) & s(k-1) & s(k-1) & \ldots & s(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(2) \\ \ldots \\ u(k) \end{bmatrix}, \tag{7.8}$$

где нижняя треугольная матрица размерности $(k+1; k+1)$ — *весовая матрица* объекта с одним входом и одним выходом.

§ 7.3. Разложение на сумму простейших дробей – форма Жордана

В дискретном случае мы можем аналогично § 5.2 разложить z-передаточную функцию объекта на простейшие дроби и выбрать компоненты этого разложения в качестве переменных состояния. Таким образом мы получим уравнения состояния с матрицей A в форме Жордана.

Предположим для простоты, что начальные условия объекта и входной сигнал — нулевые и что характеристический полином z-передаточной функции объекта не имеет кратных корней.

Следует иметь в вид
z-передаточной функци
крайней мере на едини
знаменателя z-передато
происходит из-за того, ч
цифра—аналог и время,
тельны по сравнению с
ривать общий случай z-
у которой степень числи

$$P^*(z) = \frac{\sum_{j=0}^{n} c_j^* z^j}{\sum_{i=0}^{n} a_i z^i} .$$

Поскольку при разлож
была по крайней мере
выделим целую часть:

$$P^*(z) = \frac{c_n^*}{a_n} + \frac{\sum_{j=0}^{n-1}}{\sum_{i=0}^{n} a}$$

При заданном z-преобр
виях корректирующег

$$Y(z) = \frac{c_n^*}{a_n} U(z) + P(z$$

Если теперь разложить
в виде

$$Y(z) = \frac{c_n^*}{a_n} U(z) + \sum_{i=1}^{n}$$

$$Y(z) = \frac{c_n^*}{a_n} U(z) + \sum$$

где компоненты $X_i(z)$,

$$X_i(z) = \frac{1}{z - z_i} U(z) .$$

Составляющие, образу
реакции на входной си
щие — компоненты имп

Разностное уравнени

$$x_i(k+1) = z_i x_i(k) + u$$

Уравнения (7.15) при
ванием соотношения
мента

$$x(k+1) = Ax(k) + bu$$

$$y(k) = c^{\mathrm{T}} x(k) + du(k)$$

функции объекта $s(k)$,
..., то с помощью свертки
ачении k:

(7.4)

1, 2, ...

кодной функции с соотно-

(7.5)

бъектов с векторами y и u
ет вид:

(7.6)

$$\begin{bmatrix} u_1(l) \\ u_2(l) \\ \dots \\ u_r(l) \end{bmatrix}, \qquad (7.7)$$

..., p, и $j = 1, 2, \dots, r$.

(7.8)

– *весовая матрица* объекта

дана

z-передаточную функцию
о разложения в качестве
ия состояния с матрицей A

а и входной сигнал — нуле-
ункции объекта не имеет

Следует иметь в виду, что в соответствии с условиями физической реализуемости у z-передаточной функции управляемого объекта степень числителя должна быть по крайней мере на единицу меньше степени знаменателя, тогда как степени числителя и знаменателя z-передаточной функции корректирующего элемента обычно равны. Это происходит из-за того, что время квантования, время преобразования аналог–цифра и цифра–аналог и время, необходимое для расчета управляющих переменных, незначительны по сравнению с периодом квантования. Поэтому в этой главе мы будем рассматривать общий случай z-передаточной функции цифрового корректирующего устройства, у которой степень числителя равна степени знаменателя:

$$P^*(z) = \frac{\sum\limits_{j=0}^{n} c_j^* z^j}{\sum\limits_{i=0}^{n} a_i z^i} . \qquad (7.9)$$

Поскольку при разложении на простейшие дроби требуется, чтобы степень числителя была по крайней мере на единицу меньше степени знаменателя, то мы сначала из (7.9) выделим целую часть:

$$P^*(z) = \frac{c_n^*}{a_n} + \frac{\sum\limits_{j=0}^{n-1} c_j z^j}{\sum\limits_{i=0}^{n} a_i z^i} = \frac{c_n^*}{a_n} + P(z) . \qquad (7.10)$$

При заданном z-преобразовании входной переменной и при нулевых начальных условиях корректирующего элемента изображение выхода равно

$$Y(z) = \frac{c_n^*}{a_n} U(z) + P(z)U(z) . \qquad (7.11)$$

Если теперь разложить $P(z)$ на простейшие дроби, то выражение (7.11) можно записать в виде

$$Y(z) = \frac{c_n^*}{a_n} U(z) + \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{z - z_i} U(z) , \qquad (7.12)$$

$$Y(z) = \frac{c_n^*}{a_n} U(z) + \sum_{i=1}^{n} b_i X_i(z) , \qquad (7.13)$$

где компоненты $X_i(z)$, $i = 1, 2, \dots, n$, определяются соотношением

$$X_i(z) = \frac{1}{z - z_i} U(z) . \qquad (7.14)$$

Составляющие, образующие правую часть выражения (7.13), представляют компоненты реакции на входной сигнал $U(z)$. Если $U(z)$ – единичный импульс, то эти составляющие – компоненты импульсной переходной функции.

Разностное уравнение, соответствующее (7.14), имеет вид

$$x_i(k+1) = z_i x_i(k) + u(k), \qquad i = 1, 2, \dots, n. \qquad (7.15)$$

Уравнения (7.15) при всех значениях $i = 1, 2, \dots, n$ совместно с обратным преобразованием соотношения (7.13) определяют уравнения состояния корректирующего элемента

$$x(k+1) = Ax(k) + bu(k), \qquad (7.16)$$

$$y(k) = c^{\mathrm{T}} x(k) + du(k), \qquad (7.17)$$

где приняты обозначения

$$A = \begin{bmatrix} z_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & z_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad d = \frac{c_n^*}{a_n}. \tag{7.18}$$

Из (7.18) видно, что матрица A – диагональная, а ее элементы на главной диагонали – корни характеристического полинома рассматриваемой системы. Матрица A – матрица Жордана, а вектор $x^{\mathrm{T}}(k) = [x_1(k), \dots, x_n(k)]$, компоненты которого – решения разностных уравнений (7.15) при $i = 1, 2, \dots, n$ – вектор переменных состояния этой системы.

Если уравнения (7.16) и (7.17) соответствуют физически реализуемому объекту, то $d = 0$, так как степень числителя передаточной функции такого объекта должна быть меньше n.

В случае кратных корней характеристического уравнения, соответствующего передаточной функции корректирующего элемента, положим, например,

$$P^*(z) = \frac{\sum\limits_{j=0}^{m} c_j^* z^j}{a_n(z - z_1)^s (z - z_2) \dots (z - z_n)}. \tag{7.19}$$

Выражение (7.19) записано для действительных корней характеристического уравнения. Для комплексных корней последующая процедура будет аналогична. Разлагая (4.19) на простейшие дроби, мы получим

$$P^*(z) = \frac{c_m^*}{a_n} + \frac{b_1}{(z - z_1)^s} + \dots + \frac{b_s}{z - z_1} + \frac{b_{s+1}}{z - z_2} + \dots + \frac{b_{n+s-1}}{z - z_n} = \frac{c_m^*}{a_n} + P(z). \tag{7.20}$$

При нулевых начальных условиях и при известном z-преобразовании входной переменной z-преобразование выхода равно

$$Y(z) = \frac{c_m^*}{a_n} U(z) + P(z)U(z), \tag{7.21}$$

$$Y(z) = \frac{c_m^*}{a_n} U(z) + \sum_{i=1}^{m} b_i X_i(z), \tag{7.22}$$

где произведение $P(z)U(z)$ в уравнении (7.21) представлено линейной комбинацией переменных $X_i(z)$, определяемых следующим способом:

$$\begin{aligned} X_1(z) &= \frac{1}{(z - z_1)^s} U(z) = \frac{1}{z - z_1} X_2(z), \\ X_2(z) &= \frac{1}{(z - z_1)^{s-1}} U(z) = \frac{1}{z - z_1} X_3(z), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_s(z) &= \frac{1}{z - z_1} U(z), \quad X_{s+1}(z) = \frac{1}{z - z_2} U(z), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ X_m(z) &= \frac{1}{z - z_n} U(z). \end{aligned} \tag{7.23}$$

Во временно́й области вы

$x_1(k+1) = z_1 x_1(k) + x$

$x_2(k+1) = z_1 x_2(k) + x$

. . . .

$x_s(k+1) = z_1 x_s(k) + u($

$x_{s+1}(k+1) = z_2 x_{s+1}($

. . . .

$x_m(k+1) = z_n x_m(k) +$

Уравнения (7.24) совме
в которых матрицы A, b,

$$A = \left[\begin{array}{cccc} z_1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & z_1 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & z_1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots \\ \hline & & & \\ & 0 & & \\ & & & \end{array}\right.$$

$$c = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}, \qquad d = \frac{c^*}{a}$$

Матрица A – снова матри
ному корню z_1, а нижний
ческого уравнения. Из-за
ческим уравнением сист
простейшие дроби, мы бу

§ 7.4. Связь полученного

Рассмотрим дискретные

$x(k+1) = Ax(k) + bu(k$

Определим соответствую

$zX(z) - zx(0) = AX(z) +$

$(zE - A)X(z) = zx(0) +$

$X(z) = (zE - A)^{-1} zx(0)$

$= (E - z^{-1}A)^{-1} x(0) + z$

Из сравнения выражени
где k – независимая пере

$Z[A^k] = (E - z^{-1}A)^{-1}$.

$$d = \frac{c_n^*}{a_n} \ . \qquad (7.18)$$

и на главной диагонали —
ы. Матрица A — матрица
торого — решения раз-
еменных состояния этой

реализуемому объекту,
ого объекта должна быть

оответствующего переда-
ер,

(7.19)

ристического уравнения.
гична. Разлагая (4.19) на

$$\frac{s-1}{z_n} = \frac{c_m^*}{a_n} + P(z) \ . \qquad (7.20)$$

овании входной перемен-

(7.21)

(7.22)

линейной комбинацией

(7.23)

Во временно́й области выражениям (7.23) соответствует система разностных уравнений

$$\begin{aligned}
&x_1(k+1) = z_1 x_1(k) + x_2(k),\\
&x_2(k+1) = z_1 x_2(k) + x_3(k),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&x_s(k+1) = z_1 x_s(k) + u(k),\\
&x_{s+1}(k+1) = z_2 x_{s+1}(k) + u(k),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&x_m(k+1) = z_n x_m(k) + u(k).
\end{aligned} \qquad (7.24)$$

Уравнения (7.24) совместно с уравнением (7.22) определяют уравнения состояния, в которых матрицы A, b, c и d имеют вид:

$$A = \left[\begin{array}{ccccc|cccc}
z_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & & & & \\
0 & z_1 & 1 & \dots & 0 & & & & \\
0 & 0 & z_1 & \dots & 0 & & s & 0 & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & & & \\
0 & 0 & 0 & \dots & z_1 & & & & \\
\hline
 & & & & & z_2 & 0 & \dots & 0\\
 & & 0 & & & 0 & z_3 & \dots & 0\\
 & & & & & \dots & \dots & \dots & \dots\\
 & & & & & 0 & 0 & \dots & z_n
\end{array}\right], \qquad b = \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ \dots\\ 0\\ 1\\ 1\\ \dots\\ 1 \end{bmatrix} \Bigg\} s = 1$$

$$c = \begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \dots\\ b_m \end{bmatrix}, \qquad d = \frac{c_m^*}{a_n} \ . \qquad (7.25)$$

Матрица A — снова матрица Жордана, верхний левый блок которой соответствует s-кратному корню z_1, а нижний правый блок — простым корням $z_2, z_3, \dots, z_n$ характеристического уравнения. Из-за связи, которая имеет место между матрицей A, характеристическим уравнением системы и компонентами, которые следуют из разложения на простейшие дроби, мы будем называть матрицу A матрицей динамики системы.

§ 7.4. Связь полученного решения с z-преобразованием

Рассмотрим дискретные уравнения состояния

$$x(k+1) = Ax(k) + bu(k) + w(k), \quad y(k) = c^{\mathrm{T}} x(k) + du(k) \ . \qquad (7.26)$$

Определим соответствующее этим уравнениям z-преобразование:

$$\begin{aligned}
&zX(z) - zx(0) = AX(z) + bU(z) + W(z),\\
&(zE - A)X(z) = zx(0) + bU(z) + W(z),\\
&X(z) = (zE - A)^{-1} zx(0) + (zE - A)^{-1} [bU(z) + W(z)] =\\
&= (E - z^{-1}A)^{-1} x(0) + z^{-1} (E - z^{-1} A)^{-1} [bU(z) + W(z)] \ .
\end{aligned} \qquad (7.27)$$

Из сравнения выражений (7.27) и (7.1) следует, что z-преобразование матрицы A^k, где k — независимая переменная, равно

$$Z[A^k] = (E - z^{-1}A)^{-1} \ . \qquad (7.28)$$

Выражение (7.28) может быть также записано в виде ряда, который непосредственно следует из определения z-преобразования, примененного к функции A^k:

$$Z[A^k] = \sum_{k=0}^{\infty} A^k z^{-1} = \mathrm{E} + Az^{-1} + A^2 z^{-2} + \dots \qquad (7.29)$$

В соответствии с уравнением (7.26) z-преобразование выходной переменной при $w(k) = 0$ имеет вид

$$Y(z) = c^{\mathrm{T}} X(z) + dU(z).$$

Подставляя выражение $X(z)$ из (7.27) в изображение выходной переменной, мы получим

$$Y(z) = c^{\mathrm{T}} (z\mathrm{E} - A)^{-1} zx(0) + [c^{\mathrm{T}} (z\mathrm{E} - A)^{-1} b + d]\, U(z). \qquad (7.30)$$

Если теперь начальное состояние $x(0) = 0$, то соотношение

$$G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = c^{\mathrm{T}} (z\mathrm{E} - A)^{-1} b + d \qquad (7.31)$$

определяет дискретную передаточную функцию системы, характеристическое уравнение которой равно

$$\det(z\mathrm{E} - A) = 0. \qquad (7.32)$$

Дискретная передаточная функция может быть также представлена z-преобразованием дискретной импульсной переходной функции (7.3):

$$G(z) = d + \sum_{k=1}^{\infty} c^{\mathrm{T}} A^{k-1} b z^{-k}. \qquad (7.33)$$

Пример 7.1. Определить z-преобразование разностного уравнения

$$y(k) - 1{,}5y(k-1) + 0{,}5y(k-2) = u(k-1) + 3u(k-2).$$

Решение. В соответствии с заданным уравнением и уравнениями (6.24) и (6.21) матрицы уравнений состояния равны

$$A = \begin{bmatrix} 1{,}5 & 1 \\ -0{,}5 & 0 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad c^{\mathrm{T}} = [1, 0].$$

Из соотношения (7.28) мы имеем

$$Z[A^k] = \begin{bmatrix} 1 - 1{,}5z^{-1} & -z^{-1} \\ 0{,}5\,z^{-1} & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1 - 1{,}5z^{-1} + 0{,}5z^{-2}} \begin{bmatrix} 1 & z^{-1} \\ -0{,}5z^{-1} & 1 - 1{,}5z^{-1} \end{bmatrix}.$$

Теперь в соответствии с выражением (7.27) искомое преобразование равно

$$X(z) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\Delta(z)} & \dfrac{z^{-1}}{\Delta(z)} \\[2mm] -\dfrac{0{,}5z^{-1}}{\Delta(z)} & \dfrac{1 - 1{,}5z^{-1}}{\Delta(z)} \end{bmatrix} x(0) + \begin{bmatrix} \dfrac{z^{-1} + 3z^{-2}}{\Delta(z)} \\[2mm] \dfrac{3z^{-1} - 5z^{-2}}{\Delta(z)} \end{bmatrix} U(z),$$

где $\Delta(z) = 1 - 1{,}5z^{-1} + 0{,}5z^{-2}$.

Учитывая вид матрицы c^{T}, мы получим при $x(0) = 0$

$$Y(z) = \frac{z^{-1} + 3z^{-2}}{1 - 1{,}5z^{-1} + 0{,}5z^{-2}}\, U(z),$$

где дробь – дискретная передаточная функция объекта, что непосредственно следует из заданного разностного уравнения.

---

§ 7.5. Непрерывны

Рассмотрим теперь
последовательность
Дирака, модулирова

$$u(t, t_k) = u(t) \sum_{k=0}^{\infty}$$

где t_k может приним

Аналогично мы вы

$$w(t, t_k) = w(t) \sum_{k=0}^{\infty}$$

и введем

$$t = t_k + \sigma, \quad 0 < \sigma <$$

Подставляя $u(t)$ и $w($

$$x(t_k + \sigma) = \Phi(\sigma)x(t$$

Уравнение (7.36) пр
ющей переменной u
Обе переменные пре
мени t_k^+, $k = 1, 2, \dots$

Если интервал t_{k+}
мает вид

$$x(kT + \epsilon T) = \Phi(\epsilon T)x$$

При $\epsilon = 1$

$$x((k+1)T) = \Phi(T)x($$

Используя метод, при
решив уравнение (7.
мы получим явное вы

Из выражения (7.
имеем

$$x(kT) = \Phi^k(T)x(0) +$$

$$+ \sum_{j=0}^{k-1} \Phi^j(T)\Phi(T)w[($$

$$= \Phi^k(T)x(0) + \sum_{j=1}^{k} \Phi^j$$

$$= \Phi^k(T)x(0) + \sum_{r=0}^{k-1} \Phi^k$$

где в последнем выраж

Подставляя выражен

$$x(kT + \epsilon T) = \Phi(\epsilon T)\Phi^k$$

$$+ gu(kT^+) + \sum_{r=0}^{k-1} \Phi^{k-r}$$

где

$$\Phi(\epsilon T) = e^{F\epsilon T}, \quad \Phi^k(T)$$