ОПЕРАТОРЫ

§ 4.1. Основные свойства

Рассмотренные в гл. 3 уравнения состояния, например, уравнения (3.19) и (3.20), отражают *преобразование векторов* $u \in U$ и $x \in X$ в векторы $x' \in X'$ или $y \in Y$. Преобразования осуществляются с помощью *операторов* F, g, h^{τ} и k. Поскольку преобразование с помощью операторов является одной из наиболее часто встречающихся операций в пространстве состояний, то в этой главе будут изложены основные типы и свойства этих операторов и некоторые их применения в связи с уравнениями состояния.

Пусть X и Y — два векторных пространства и каждый элемент $y \in Y$ однозначно соответствует элементу $x \in X$. Тогда это соответствие кратко можно записать так:

$$x = Ay, \tag{4.1}$$

и мы говорим об операторе A, определенном в пространстве Y и отображающем Y в X.

Сумма операторов A_1 и A_2 определяется соотношением

$$(A_1 + A_2)y = A_1 y + A_2 y \tag{4.2}$$

для всех значений $y \in Y$.

Поскольку сложение в векторном пространстве коммутативно, то из (4.2) следует, что

$$(A_1 + A_2)y = (A_2 + A_1)y, \tag{4.3}$$

$$[A_1 + (A_2 + A_3)]\,y = [(A_1 + A_2) + A_3]\,y. \tag{4.4}$$

Произведение операторов $A_1 A_2$ представляет собой последовательное применение оператора A_2 к y и оператора A_1 к $A_2 y$. Коммутативный закон здесь не выполняется:

$$A_1 A_2 y \neq A_2 A_1 y. \tag{4.5}$$

Если y — m-мерный вектор, равный сумме m-мерных векторов, например $y = y_1 + y_2$, то дистрибутивный закон в общем случае не выполняется при преобразовании с помощью оператора A:

$$A(y_1 + y_2) \neq Ay_1 + Ay_2. \tag{4.6}$$

Если мы умножаем m-мерный вектор на произвольную константу (число) a, то снова получаем m-мерный вектор:

$$f = ay. \tag{4.7}$$

Оператор A называется *однородным*, если

$$Aay = aAy. \tag{4.8}$$

Специальными типами операторов являются: *векторный оператор*, где

$$f = Ay, \quad A = [A_1, A_2, \ldots, A_n], \tag{4.9}$$

и *матричный оператор*:

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \cdots \\ f_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_m \end{bmatrix}, \tag{4.10}$$

где

$$f_i = \sum_{j=1}^{m} A_{ij} y_j, \quad i = \ldots$$

или

$$f = Ay.$$

§ 4.2. Линейность

Оператор называется л… тивности:

$$A(ay_1 + by_2) = aAy_1 \ldots$$

Если условие (4.13) не…

Если математическа… циальными уравнениям… упомянутый ранее вид

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t)x(t) + G\ldots$$

$$y(t) = H(t)x(t) + K(t\ldots$$

где $u(t)$ — r-мерный вхо… ный выходной вектор, … $(n;\, r)$, $(p;\, n)$ и $(p;\, r$…

Для дискретных лин…

$$x(k+1) = A(k)x(k) + \ldots$$

$$y(k) = C(k)x(k) + D(\ldots$$

В уравнениях (4.14)… функциями независим… описывают, следователь…

§ 4.3. Стационарность

Оператор A называется с…

$$x(t - t_1) = A[y(t - t_1 \ldots$$

при всех значениях t и …

Система называется … операторами. Другими … ями с постоянными коэ… описываемая уравнения… F, G, H и K — постоянны…

Подобным же образо…

§ 4.4. Эквивалентность с…

Мы скажем, что две си… u^2, x^2, y^2 соответственн… для всех значений t из ра…

$$u^1(t) = u^2(t)$$

следует равенство

$$y^1(t) = y^2(t).$$

где

$$f_i = \sum_{j=1}^{m} A_{ij} y_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{4.11}$$

или

$$f = Ay. \tag{4.12}$$

§ 4.2. Линейность

Оператор называется *линейным*, если он обладает свойствами однородности и дистрибутивности:

$$A(ay_1 + by_2) = aAy_1 + bAy_2. \tag{4.13}$$

Если условие (4.13) не выполняется, то такой оператор — *нелинейный*.

Если математическая модель объекта может быть описана линейными дифференциальными уравнениями, то уравнения состояния с линейным оператором принимают упомянутый ранее вид (3.19) и (3.20):

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(t)x(t) + G(t)u(t), \tag{4.14}$$

$$y(t) = H(t)x(t) + K(t)u(t), \tag{4.15}$$

где $u(t)$ — r-мерный входной вектор, $x(t)$ — n-мерный вектор состояния, $y(t)$ — p-мерный выходной вектор, а F, G, H и K — линейные матричные операторы размера $(n;\ n)$, $(n;\ r)$, $(p;\ n)$ и $(p;\ r)$ соответственно.

Для дискретных линейных систем вместо уравнений (4.14) и (4.15) мы имеем

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k), \tag{4.16}$$

$$y(k) = C(k)x(k) + D(k)u(k). \tag{4.17}$$

В уравнениях (4.14) — (4.17) все линейные операторы в общем случае являются функциями независимой переменной времени. Приведенные уравнения состояния описывают, следовательно, системы с переменными во времени коэффициентами.

§ 4.3. Стационарность

Оператор A называется *стационарным*, если он удовлетворяет соотношению

$$x(t - t_1) = A[y(t - t_1)] \tag{4.18}$$

при всех значениях t и t_1 и для всех значений $y \in Y$.

Система называется *стационарной*, если она может быть описана стационарными операторами. Другими словами, система, описываемая дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, — стационарная система и, аналогично, система, описываемая уравнениями (4.14) и (4.15), — стационарная система, если операторы F, G, H и K — постоянные матрицы.

Подобным же образом мы можем определить стационарность дискретной системы.

§ 4.4. Эквивалентность систем

Мы скажем, что две системы с векторами входа, состояния и выхода u^1, x^1, y^1 и u^2, x^2, y^2 соответственно *эквивалентны по наблюдению*, если для всех значений $u \in U$ и для всех значений t из равенства

$$u^1(t) = u^2(t) \tag{4.19}$$

следует равенство

$$y^1(t) = y^2(t). \tag{4.20}$$

Следовательно, в определении эквивалентности по наблюдению не проводится сравнение состояния систем, а сравниваются только внешние переменные, т.е. входы и выходы систем.

При рассмотрении эквивалентности или различия внутренних свойств систем нужно ввести более сложное определение эквивалентности, которое должно включать в себя также состояние системы. Однако такое определение не должно зависеть от произвольного выбора системы координат переменных состояния. Другими словами, векторы состояния двух систем с эквивалентными состояниями в любой момент времени t могут быть различными, однако должна существовать возможность преобразования одного вектора состояния в другой с помощью линейного постоянного оператора.

Из предыдущего рассуждения следует определение так называемой строгой эквивалентности.

Две системы *строго эквивалентны,* если выполняется условие эквивалентности по наблюдению и если из соотношения (4.19) следует

$$x^1(t) = Fx^2(t), \tag{4.21}$$

где F — невырожденная постоянная матрица.

РЕШЕНИЕ НЕПРЕР

§ 5.1. Решение во време

Рассмотрим уравнение

$$x'(t) = Fx(t) + Gu(t) +$$

где F, G — постоянные
состояния управляемог
состояние объекта в лю
ных и $w(t)$ — вектор во
нейного объекта с одним
$x(t)$ определяется поря
ненту. Предположим, чт
нал $u(t)$ при $t \geqslant t_0$ из

Уравнению (5.1) соот

$$x'(t) = Fx(t),$$

решение которого равно

$$x(t) = e^{F(t-t_0)}x(t_0),$$

где $x(t_0)$ — вектор нач
ной ряд

$$e^{Ft} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^k t^k}{k!}.$$

Введя обозначение

$$e^{F(t-t_0)} = \Phi(t-t_0),$$

можно представить решен

$$x(t) = \Phi(t-t_0)x(t_0).$$

Пусть решение неоднород

$$x(t) = \Phi(t-t_0)C_1(t).$$

Дифференцируя уравнени

$$x'(t) = Fx(t) + \Phi(t-t_0)$$

Сравнивая уравнения (5.1

$$\Phi(t-t_0)C_1'(t) = Gu(t) +$$

и, следовательно,

$$C_1(t) = \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(\tau - t_0)\,[$$

Решение уравнения (5.1),

$$x(t) = \Phi(t-t_0)C_2 + \int_{t_0}^{t} \Phi$$