Глава **13**

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПАРАМЕТРОВ МОДЕЛИ

Задача идентификации объекта управления заключается в нахождении его математической модели, которая в некотором смысле наилучшим способом описывает его динамические свойства. Если конечной целью является нахождение оптимального управления, то достаточно, чтобы при заданном входе выход модели был эквивалентен выходу системы. В этом случае нет необходимости в том, чтобы структура и параметры модели совпадали со структурой и параметрами физической системы.

Вообще же задача построения математической модели заключается в определении структуры объекта, нахождении значений параметров и, если необходимо, значений зависимых переменных, например, переменных состояния.

Иногда задача определения структуры объекта рассматривается как отдельная задача, четко отделенная от задачи нахождения параметров. Так, например, Л.А. Заде [62.2] называет задачу определения структуры задачей классификации. В некоторых более современных работах, однако, структура и параметры оцениваются одновременно, т.е. с помощью единой программы. Например, М. Карны [76.11] определяет порядок модели линейного объекта и ее параметры одним общим алгоритмом.

П. Эйкхофф [74.7] определил математическую модель объекта как математическое представление существенных сторон существующего или создаваемого объекта, описывающее знания об этом объекте в наиболее удобной форме.

Это определение очень общо. Оно позволяет определить математическую модель любым способом. В нем выделены полезность модели и задача нахождения существенных свойств рассматриваемого объекта. Это важная сторона, поскольку предполагается, что модель может дать информацию для последующих решений. Слишком сложная модель для этих целей не может быть использована. Однако не очень сложная модель может описывать действительность только приближенно. Методы идентификации в большинстве случаев при заданной ограниченной точности измерений не позволяют построить сложную модель, эквивалентную по структуре и параметрам реальному объекту. Этот факт, однако, не мешает последующему использованию такой модели, если, конечно, она отражает существенные стороны объекта. Более того, именно в силу своей простоты такая модель наиболее пригодна для последующего использования.

Идентификацию можно провести либо методами физико-математического анализа, либо методами экспериментального анализа.

При идентификации методами физико-математического анализа мы исходим из конструктивных данных и математического описания простейших процессов, которые имеют место в изучаемом объекте. Таким образом мы получаем систему алгебраических и дифференциальных уравнений, содержащих как входные и выходные переменные, так и переменные состояния. В эти уравнения иногда включаются избыточные внутренние переменные объекта, которые можно не учитывать. Если описание системы физико-математическими методами полно, то отдельные уравнения состояния можно упорядочить и придать им форму уравнений состояния. В этом случае компоненты вектора состояния имеют точный физический смысл. Входные переменные могут быть как полезными переменными, например, управляющими переменными, так и возмущающими переменными. Они могут быть либо детерминированными, либо случайными процессами. Простой пример такого подхода был приведен в § 3.1.

При идентификации методами экспериментального анализа мы обычно находим математическую модель устойчивого объекта по измерениям его входных и выход-

ных величин. Для этой цел
тификации. Очень хороши
[73.18] описаны теоретич
относительно простыми и
чимся только несколькими
тезом систем в пространств

Методы идентификации
ческие методы. В детерм
должна иметь определенно
простой входной сигнал,
ничный скачок, синусоида

В статистических мето
сигнал произвольны. Кро
тистические свойства кот
ляют выразить качество
сия, ковариационная матр

Особый случай статисти
полагается, что матрицы A
известны, но компоненты
быть определены косвенн
полагается также, что по
Поэтому оптимальное оце
тификации стохастических

Различие в отдельных
или нелинейностью идент
и возможностью их изм
или структуре модели и
тип математической моде
ваясь здесь на деталях,
что методы идентификац
A, B, C и D в уравнении
применяются для постро
ходная функция, передат
достатком, поскольку м
ношениями, которые до
делями и описанием сист
идентификации систем п
части объекта, поскольку
на входе и выходе объект

Рассмотрение стохасти
тодом наименьших квад
случаях основное внима
щим алгоритмам, котор
руемые параметры по ме
руют устойчивые численн

§ 13.1. Детерминированн

13.1.1. Минимальная реа
чей минимальной реализ
ничный скачок (переход
циентов a_i, b_i, $i = 0, 1,$.
щего разностного уравне
переходную функцию $s($
ошибки в ординатах им
их можно не учитывать.

Задача практически не
связь между двумя реа

Глава 13

ахождении его математи-
способом описывает его
ахождение оптимального
модели был эквивалентен
чтобы структура и пара-
ской системы.
ключается в определении
ли необходимо, значений

вается как отдельная за-
Так, например, Л.А. Заде
сификации. В некоторых
ы оцениваются одновре-
рны [76.11] определяет
м алгоритмом.
кта как математическое
даваемого объекта, опи-

математическую модель
ача нахождения сущест-
она, поскольку предпо-
щих решений. Слишком
Однако не очень слож-
женно. Методы иденти-
точности измерений не
труктуре и параметрам
му использованию такой
кта. Более того, именно
ующего использования.
тематического анализа,

ализа мы исходим из
йших процессов, кото-
учаем систему алгебраи-
ые и выходные перемен-
ключаются избыточные
Если описание системы
ения состояния можно
ом случае компоненты
еременные могут быть
енными, так и возму-
анными, либо случай-
в § 3.1.
мы обычно находим
его входных и выход-

ных величин. Для этой цели было разработано большое число различных методов идентификации. Очень хорошие обзоры можно найти в работах [71.21, 74.7]. В работе [73.18] описаны теоретически обоснованные процедуры, которые характеризуются относительно простыми и быстро сходящимися алгоритмами. Здесь же мы ограничимся только несколькими методами, непосредственно связанными с анализом и синтезом систем в пространстве состояний.

Методы идентификации систем можно разделить на детерминированные и статистические методы. В детерминированных методах обычно предполагается, что система должна иметь определенное начальное состояние, например, $x(0) = 0$, и относительно простой входной сигнал, например, прямоугольный импульс единичной площади, единичный скачок, синусоидальный сигнал и т.д.

В статистических методах идентификации систем начальное состояние и входной сигнал произвольны. Кроме полезного сигнала, на объект воздействует помеха, статистические свойства которой могут быть неизвестны. Статистические методы позволяют выразить качество оценивания через такие параметры, как, например, дисперсия, ковариационная матрица и т.д.

Особый случай статистического оценивания — это оценка вектора состояния. Предполагается, что матрицы A, B, C и D математической модели в пространстве состояний известны, но компоненты вектора состояния неизмеримы. Следовательно, они должны быть определены косвенно по данным, полученным со входа и выхода объекта. Предполагается также, что помеха присутствует как на входе, так и на выходе объекта. Поэтому оптимальное оценивание вектора состояния на фоне помех относится к идентификации стохастических систем методами экспериментального анализа.

Различие в отдельных методах идентификации может быть вызвано линейностью или нелинейностью идентифицируемого объекта, наличием или отсутствием шумов и возможностью их измерения, наличием или отсутствием информации о порядке или структуре модели и т.д. Однако основное, что отличает отдельные методы, — это тип математической модели и критерий качества построения модели. Не останавливаясь здесь на деталях, которые можно найти в специальной литературе, отметим, что методы идентификации, применяемые для непосредственного оценивания матриц A, B, C и D в уравнении состояния, развиты в меньшей степени, чем методы, которые применяются для построения классических моделей, таких как импульсная переходная функция, передаточная функция и т.д. Это, однако, не является большим недостатком, поскольку мы уже познакомились в 6-й и 7-й главах с основными соотношениями, которые достаточно хорошо объясняют связь между классическими моделями и описанием систем в пространстве состояний. Однако любой из этих методов идентификации систем позволяет найти модель только наблюдаемой и достижимой части объекта, поскольку при вычислениях можно пользоваться только измерениями на входе и выходе объекта.

Рассмотрение стохастических методов идентификации систем будет ограничено методом наименьших квадратов и методом максимального правдоподобия. В обоих случаях основное внимание будет уделено таким постановкам задач и соответствующим алгоритмам, которые, с одной стороны, позволяют пересчитывать идентифицируемые параметры по мере получения новых измерений, а с другой стороны, гарантируют устойчивые численные решения при большом числе искомых параметров.

§ 13.1. Детерминированные методы

13.1.1. Минимальная реализация. Рассматриваемая ниже задача часто называется задачей минимальной реализации импульсной переходной функции или реакции на единичный скачок (переходной функции). Задача заключается в нахождении коэффициентов a_i, b_i, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, передаточной функции (10.62) или соответствующего разностного уравнения минимального порядка, если мы знаем точно импульсную переходную функцию $s(k)$, $k = 0, 1, \ldots$ Под словом "точно" мы подразумеваем, что ошибки в ординатах импульсной переходной функции пренебрежимо малы, так что их можно не учитывать.

Задача практически не изменяется, если мы знаем переходную функцию, поскольку связь между двумя реакциями очень проста. Обозначая дискретные ординаты переходной функции через $y_p(k)$, мы можем записать

$$s(k) = y_p(k) - y_p(k-1), \tag{13.1}$$

$$y_p(k) = \sum_{i=0}^{k} s(i). \tag{13.2}$$

Зная переходную функцию, мы можем, следовательно, с помощью выражения (13.1) определить импульсную переходную функцию и свести такую постановку задачи к исходной.

Отметим, что импульсная переходная функция дискретной системы может быть определена как реакция на единичный импульс

$$u(k) = 1 \quad \text{при } k = 0, \tag{13.3}$$

$$u(k) = 0 \quad \text{при } k \neq 0, \tag{13.4}$$

если начальное состояние объекта $x(0) = 0$.

Искомая модель определяется среди моделей минимального порядка не потому, что при этом получается наиболее простая модель, а в силу того, что по измерениям входа и выхода можно описать только достижимую и наблюдаемую часть объекта с соответствующим минимальным характеристическим полиномом, и именно поэтому математическая модель должна быть минимального порядка. Следует отметить, что необходимости в непосредственном определении импульсной переходной функции или реакции на скачок по измерениям нет. В большинстве практических случаев это даже невозможно. Однако предполагается, что одну из них можно вычислить с помощью некоторого метода идентификации, в котором используются измерения входа и выхода объекта. Расчет этих функций по сравнению с расчетом коэффициентов, например, разностного уравнения проще и представляет с математической точки зрения линейную задачу.

Рассмотрим сначала задачу минимальной реализации для объекта с одним входом и одним выходом. В §§ 10.3 и 10.5 мы показали, что параметры канонических форм достижимости и наблюдаемости непосредственно являются коэффициентами a_i, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, и ординатами $s(k)$ дискретной импульсной переходной функции. Согласно уравнению (10.90) имеем

$$s(k) = -[s(k-n), s(k-n+1), \ldots, s(k-1)] \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} \tag{13.5}$$

для $k > n$.

При $k = n+1, n+2, \ldots, 2n$ мы получаем систему линейных алгебраических уравнений, которые можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} s(n+1) \\ s(n+2) \\ \cdots \\ s(2n) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} s(1) & s(2) & \ldots & s(n) \\ s(2) & s(3) & \ldots & s(n+1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ s(n) & s(n+1) & & s(2n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} = -S_n \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} \tag{13.6}$$

Минимальный порядок этой системы уравнений определяется таким минимальным значением n, при котором $\det[S_n] = 0$. Это означает, что $2n$ ординат дискретной импульсной переходной функции определяют n уравнений, которые образуют систему (13.6), позволяющую нам определить коэффициенты a_i, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Эти коэффициенты и ординаты $s(1), s(2), \ldots, s(n)$ полностью определяют каноническую форму достижимости и наблюдаемости.

Если надо определить коэффициенты $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ числителя передаточной функции, то можно воспользоваться выражением (10.89):

$$b_{n-k} = s(k) + a_{n-1}s(k-1) + \ldots + a_0 s(k-n), \quad n \geqslant k.$$

Перейдем теперь к решению задачи минимальной реализации для систем со многими входами и многими выходами. Решение этой задачи впервые было опубликовано в работе [66.3], где не была введена каноническая форма и поэтому нужно было определять $n(n+r+p)$ коэффициентов. Более удобной является процедура, предложенная в работе [71.2], где для решения задачи минимальной реализации был использован подход, основанный на канонической форме наблюдаемости. Это упрощает решение, и необходимым оказывается вычисление только $n(r+p)$ коэффициентов. Поэтому мы займемся этой процедурой.

Согласно выражению (11.9) $D = S(0)$, так что задача минимальной реализации сводится к определению матриц A, B и C, которые для произвольного k удовлетворяют уравнению

$$S(k) = CA^{k-1}B, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{13.7}$$

Здесь порядок n квадратной матрицы A должен быть минимально возможным. Элемент $s_{ij}(k)$ матрицы $S(k)$ представляет значение i-го выхода в момент времени kT, вызванного воздействием единичного импульса на j-й вход в нулевой момент времени.

Построим с помощью выражения (13.7) симметричную матрицу

$$\begin{bmatrix} S(1) & S(2) & \ldots & S(n) \\ S(2) & S(3) & \ldots & S(n+1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S(n) & S(n+1) & \ldots & S(2n-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CB & CAB & \ldots & CA^{n-1}B \\ CAB & CA^2B & \ldots & CA^nB \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ CA^{n-1}B & CA^nB & \ldots & CA^{2n-2}B \end{bmatrix}. \tag{13.8}$$

Легко заметить, что матрица в правой части (13.8) может быть записана как произведение матрицы наблюдаемости и матрицы достижимости. Обозначив матрицу в левой части уравнения (13.8) через $\mathcal{S}_n$, мы можем записать тогда (13.8) в виде

$$\mathcal{S}_n = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} [B, AB, \ldots, A^{n-1}B]. \tag{13.9}$$

Как матрица достижимости, так и матрица наблюдаемости должны иметь ранг n, поскольку они относятся к той части системы, которая достижима и наблюдаема по входным и выходным переменным. Поскольку ранг произведения двух матриц, каждая из которых имеет ранг $h = n$, равен $h \leqslant n$, то порядок системы будет равен

$$n = \max h[\mathcal{S}_i]. \tag{13.10}$$

В п. 11.3.2 мы познакомились со способом определения структуры достижимости и наблюдаемости, основанным на линейной зависимости столбцов и строк матрицы достижимости и матрицы наблюдаемости. Та же самая линейная зависимость имеет место для столбцов и строк матрицы $\mathcal{S}_n$, так что с помощью измеренных значений входных и выходных переменных можно определить структуру объекта.

В дальнейшем при решении задачи минимальной реализации мы будем пользоваться в основном структурой наблюдаемости, поскольку на реальном объекте мы можем отдельно наблюдать каждую выходную переменную, тогда как входные переменные действуют, как правило, одновременно, так что их отдельное влияние наблюдать нельзя.

Для определения минимальной реализации воспользуемся канонической формой наблюдаемости (11.54), основные свойства которой выражаются соотношениями (11.56), (11.58) и (11.61). Соотношения (11.61) в применении к i-й частной системе имеют вид

$$c_i^{\mathrm{T}} A^{n_i} = \sum_{j=1}^{i} \alpha_{ij}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} c_j^{\mathrm{T}} \\ c_j^{\mathrm{T}} A \\ \ldots \\ c_j^{\mathrm{T}} A^{n_j - 1} \end{bmatrix}. \tag{13.11}$$

Поскольку это же линейное соотношение применимо к строкам матрицы $\mathcal{S}$, мы можем записать

$$s_i^{\mathrm{T}}(n_i + 1) = \sum_{j=1}^{i} \alpha_{ij}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} s_j^{\mathrm{T}}(1) \\ s_j^{\mathrm{T}}(2) \\ \dots \\ s_j^{\mathrm{T}}(n_j) \end{bmatrix} . \qquad (13.12)$$

С помощью этого выражения мы построим сначала строки $s_1^{\mathrm{T}}(k), s_1^{\mathrm{T}}(k+1), \dots$ для первой входной переменной ($j = 1$) и будем проверять после получения каждой новой строки линейную независимость всех строк. Как только мы найдем первую линейно зависимую строку, мы получим

$$s_1^{\mathrm{T}}(n_1 + 1) = \alpha_{11}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} s_1^{\mathrm{T}}(1) \\ s_1^{\mathrm{T}}(2) \\ \dots \\ s_1^{\mathrm{T}}(n_1) \end{bmatrix} . \qquad (13.13)$$

Таким способом мы определим порядок n_1 первой частной системы, наблюдаемой по входной переменной y_1. Одновременно с помощью уравнения (13.13) мы определим коэффициенты α_{11}^{T} характеристического уравнения этой частной системы. Теперь мы можем рассмотреть строки $s_2^{\mathrm{T}}(1), s_2^{\mathrm{T}}(2), \dots$, элементы которых — измеренные значения выходной переменной y_2. И снова, как только мы найдем первую зависимую строку, мы получим

$$s_2^{\mathrm{T}}(n_2 + 1) = [\alpha_{21}^{\mathrm{T}}, \alpha_{22}^{\mathrm{T}}] \left[\begin{array}{c} s_1^{\mathrm{T}}(1) \\ \dots \\ s_1^{\mathrm{T}}(n_1) \\ \hline s_2^{\mathrm{T}}(1) \\ \dots \\ s_2^{\mathrm{T}}(n_2) \end{array}\right] . \qquad (13.14)$$

Таким способом мы определим порядок n_2 второй частной системы, которая наблюдаема, если к выходной переменной y_1 добавить переменную y_2. Уравнение (13.14) позволяет также определить коэффициенты α_{22}^{T} характеристического уравнения этой частной системы, а также коэффициенты α_{21}^{T} связующего члена. Аналогичным способом мы продолжим рассмотрение следующих выходных переменных до тех пор, пока они все не будут просмотрены. Таким образом будет вычислена вся матрица A_{P}.

Определение матрицы B_{P} облегчается тем фактом, что в канонической форме наблюдаемости $Q_{\mathrm{PF}} = \mathrm{E}$. С учетом этого соотношения уравнение (13.9) принимает вид

$$\left[\begin{array}{c} s_1^{\mathrm{T}}(1) \\ \dots \\ s_1^{\mathrm{T}}(n_1) \\ \hline s_2^{\mathrm{T}}(1) \\ \dots \\ \hline \dots \\ s_m^{\mathrm{T}}(n_m) \end{array}\right] = [B_{\mathrm{P}}, A_{\mathrm{P}}B_{\mathrm{P}}, \dots, A_{\mathrm{P}}^{n-1}B_{\mathrm{P}}] . \qquad (13.15)$$

Из уравнения (13.15) очевидно, что матрица B_{P} эквивалентна первым r столбцам матрицы в левой части этого уравнения.

При определении матри
(11.54) первые m строк им

$c_i^{\mathrm{T}} = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots,$

где единица находится на м
$n_i = 0$ мы вычисляем c_i^{T} с по

$c_i^{\mathrm{T}}[B_{\mathrm{P}}, A_{\mathrm{P}}B_{\mathrm{P}}, \dots, A_{\mathrm{P}}^{n-1}$

Для вычисления матриц A
$\dots, N$, где $N = n + \max n_i$.

13.1.2. Определение к
более сложную задачу, з
уравнения в предположен
менных объекта в момен
ся главным образом в то
ми даже малые отклонен
нечном результате. К то
по данным измерений вх
Она, однако, может быть
ввести последовательност
заданная система может бь

Для системы с одним
нение имеет вид

$y(k+n) + a_{n-1}y(k+n-$

$= b_0u(k) + b_1u(k+1) + .$

Число неизвестных коэфф
нированном случае нам ну
которых можно составить
лить коэффициенты a_i и b_i

$\begin{bmatrix} y(n) \\ y(n+1) \\ \dots \\ y(2n-1) \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} y(0) & \dots & y(\\ y(1) & \dots & y(\\ \dots & & . \\ y(2n-1) & \dots & y(3 \end{bmatrix}$

$y = Z_{1n}\vartheta.$

Матрица Z_{1n}, входящая
случаях, например, в с
сигнале. Такие ситуации
Если же, однако, входно
в уравнении (13.20) нев
найти искомые коэффи

При определении матрицы C_P мы пользуемся тем фактом, что согласно уравнению (11.54) первые m строк имеют вид

$$c_i^T = [0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0], \tag{13.16}$$

где единица находится на месте $(n_1 + n_2 + \ldots + n_{i-1} + 1)$-го элемента, если $n_i > 0$. При $n_i = 0$ мы вычисляем c_i^T с помощью уравнения (13.8), т.е. согласно уравнению

$$c_i^T[B_P, A_P B_P, \ldots, A_P^{n-1} B_P] = s_i^T(1). \tag{13.17}$$

Для вычисления матриц A_P, B_P и C_P необходимо знать значения $S(k)$ при $k = 1, 2, \ldots, N$, где $N = n + \max n_i$.

13.1.2. Определение коэффициентов разностного уравнения. Рассмотрим теперь более сложную задачу, заключающуюся в определении коэффициентов разностного уравнения в предположении, что известны точные значения входной и выходной переменных объекта в моменты квантования. Трудность решения этой задачи заключается главным образом в том, что при численном решении детерминированными методами даже малые отклонения от точных значений могут очень сильно сказаться на конечном результате. К тому же определение коэффициентов разностного уравнения по данным измерений входа и выхода объекта — это в основном нелинейная задача. Она, однако, может быть сведена к линейной, если в качестве переменных состояния ввести последовательности значений выходных переменных системы. Таким образом, заданная система может быть описана системой разностных уравнений.

Для системы с одним входом и одним выходом соответствующее разностное уравнение имеет вид

$$y(k+n) + a_{n-1} y(k+n-1) + \ldots + a_1 y(k+1) + a_0 y(k) =$$

$$= b_0 u(k) + b_1 u(k+1) + \ldots + b_{n-1} u(k+n-1). \tag{13.18}$$

Число неизвестных коэффициентов уравнения (13.18) равно $2n$. Поэтому в детерминированном случае нам нужно такое количество пар измерений $u(k)$ и $y(k)$, с помощью которых можно составить систему уравнений, состоящую из $2n$ уравнений, и определить коэффициенты a_i и b_i, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Эта система имеет вид

$$\begin{bmatrix} y(n) \\ y(n+1) \\ \ldots \\ y(2n-1) \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} y(0) & \ldots & y(n-1) & u(0) & \ldots & u(n-1) \\ y(1) & \ldots & y(n-2) & u(1) & \ldots & u(n-2) \\ \ldots & & \ldots & \ldots & & \ldots \\ y(2n-1) & \ldots & y(3n-2) & u(2n-1) & \ldots & u(3n-2) \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} -a_0 \\ -a_1 \\ \ldots \\ -a_{n-1} \\ \hline b_0 \\ b_1 \\ \ldots \\ b_{n-1} \end{array}\right], \tag{13.19}$$

$$y = Z_{1n} \vartheta. \tag{13.20}$$

Матрица Z_{1n}, входящая в уравнение (13.20), бывает вырожденной только в особых случаях, например, в случае установившегося движения при постоянном входном сигнале. Такие ситуации можно легко исключить, исходя из физических представлений. Если же, однако, входной сигнал достаточно хорошо возбуждает систему, то матрица в уравнении (13.20) невырождена, и, следовательно, такой входной сигнал позволяет найти искомые коэффициенты. Порядок системы n определяется как наибольшее число, для которого эта матрица имеет ранг $h(Z_{1n}) = 2n$. В неопределенных случаях следует проверить, удовлетворяют ли отдельные наборы данных из уравнения (13.19) разностному уравнению (13.18). Если порядок системы определен правильно, то вектор искомых параметров равен

$$\vartheta = Z_{1n}^{-1} y. \tag{13.21}$$

При анализе динамических свойств многомерных систем с r входами и p выходами мы определяем порядок системы, структуру наблюдаемости и значения параметров по следующей процедуре [47.1].

По измеренным компонентам вектора входных переменных u и первой выходной переменной y_1 мы строим матрицы

$$Z_{1m} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} y_1(0) & \ldots & y_1(m-1) & u^{\mathrm T}(0) & \ldots & u^{\mathrm T}(m-1) \\ \ldots & & \ldots & \ldots & & \\ y_1[(1+r)m-1] & \ldots & y_1[(2+r)m-2] & u^{\mathrm T}[(1+r)m-1] & \ldots & u^{\mathrm T}[(2+r)m-2] \end{array}\right] \tag{13.22}$$

для $m = 1, 2, \ldots, n_1$ до тех пор, пока не найдем линейно зависимый столбец, т.е. до тех пор, пока

$$\begin{bmatrix} y_1(n_1) \\ \ldots \\ \ldots \\ y_1[(2+r)n_1 - 1] \end{bmatrix} = Z_{1n_1} \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \beta_0^{(1)} \\ \ldots \\ \beta_{n_1-1}^{(1)} \end{bmatrix}, \tag{13.23}$$

$$y = Z_{1n_1} \vartheta. \tag{13.24}$$

В уравнении (13.23) $\alpha_{11}^{\mathrm T}(1; n_1)$ — матрица-строка, состоящая из коэффициентов частной системы, наблюдаемой по выходной переменной y_1, а $\beta_0^{\mathrm T(1)}, \ldots, \beta_{n_1-1}^{\mathrm T(1)}$ — строки матрицы B_1, из уравнения (11.54). Следовательно, общее число неизвестных коэффициентов равно $(1+r)n_1$, так что порядок матрицы Z_{1n_1} также равен $(1+r)n_1$. При соответствующей входной последовательности векторов u матрица Z_{1n_1} невырождена и, следовательно, обратная матрица существует, и мы можем вычислить из уравнения (13.24) матрицу-столбец ϑ, элементы которой и являются искомыми коэффициентами. Тогда первое разностное уравнение, соответствующее выходной переменной y_1, имеет вид

$$y_1(k+n_1) - \alpha_{11}^{\mathrm T} \begin{bmatrix} y_1(k) \\ \ldots \\ y_1(k+n_1-1) \end{bmatrix} = \sum_{j=0}^{n_1-1} \beta_j^{\mathrm T(1)} u(k+j). \tag{13.25}$$

Теперь мы переходим к идентификации следующей части системы. Для этого мы пользуемся измеренными значениями как выходной переменной y_1, так и выходной переменной y_2, и строим матрицу

$$Z_{2m} = [Y_{2m}, U_{2m}], \tag{13.26}$$

где

$$Y_{2m} = \left[\begin{array}{ccc|c} y_1(0) & \ldots & y_1(n_1-1) & y_2(0) \\ \ldots & & \ldots & \ldots \\ y_1[(1+r)m-1+n_1] & \ldots & y_1[(1+r)m-2+n_1] & y_2[(1+r)m-1+n_1] \end{array}\right]$$

$U_{2m} = \begin{bmatrix} u^{\mathrm T}(0) \\ \ldots \\ u^{\mathrm T}[(1+r)m-1 \end{bmatrix}$

для $m = 1, 2, \ldots, n_2$ до те
тех пор, пока

$\begin{bmatrix} y_2(n_2) \\ \ldots \\ y_2[(2+r)n_2-1+n_1] \end{bmatrix}$

Второе разностное уравн

$y_2(k+n_2) - \alpha_{22}^{\mathrm T} \begin{bmatrix} y_2(k) \\ \ldots \\ y_2(k \end{bmatrix}$

$= \sum_{j=0}^{n_2-1} \beta_j^{\mathrm T(2)} u(k+j).$

Аналогично мы поступ
Если при i-й выходной п
свойства соответствующе
ных переменных $y_1, y_2, \ldots$
ное алгебраическое урав
ностями $u(k)$, $y_1(k)$, $y_1(k$

§ 13.2 Метод наименьших

В большинстве практиче
величин недостаточно точн
но на полезные входные
сигналы w, а выходные
нения состояния можно за

$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$

$y(k) = Cx(k) + Du(k) + \ldots$

где $v(k)$ и $w(k)$ — случа
знаем только некоторые
информации о случайных
тификации и предложить
рафе мы будем занима
к одному из старейших к

С тех пор как этот м
для расчета движения не
ных областях, что позво
Ниже метод наименьших

$$\begin{matrix} y_2(0) & \dots & y_2(m-1) \\ \dots & & \dots \\ y_2[(1+r)m-1+n_1] & \dots & y_2[(2+r)m-2+n_1] \end{matrix}\Bigg], \tag{13.27}$$

$$U_{2m} = \begin{bmatrix} u^{\mathrm{T}}(0) & \dots & u^{\mathrm{T}}(m-1) \\ \dots & & \dots \\ u^{\mathrm{T}}[(1+r)m-1+n_1] & \dots & u^{\mathrm{T}}[(2+r)m-2+n_1] \end{bmatrix}, \tag{13.28}$$

для $m = 1, 2, \dots, n_2$ до тех пор, пока не найдем линейно зависимый столбец, т.е. до тех пор, пока

$$\begin{bmatrix} y_2(n_2) \\ \dots \\ y_2[(2+r)n_2 - 1 + n_1] \end{bmatrix} = Z_{2m} \begin{bmatrix} \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \\ \beta_0^{(2)} \\ \dots \\ \beta_{n_2-1}^{(2)} \end{bmatrix}. \tag{13.29}$$

Второе разностное уравнение тогда имеет вид

$$y_2(k+n_2) - \alpha_{22}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} y_2(k) \\ \dots \\ y_2(k+n_2-1) \end{bmatrix} - \alpha_{21}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} y_1(k) \\ \dots \\ y_1(k+n_1-1) \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{j=0}^{n_2-1} \beta_j^{\mathrm{T}(2)} u(k+j). \tag{13.30}$$

Аналогично мы поступаем и со следующими выходными переменными системы. Если при i-й выходной переменной мы получаем порядок $n_i = 0$, то динамические свойства соответствующей частной системы будут описываться с помощью выходных переменных $y_1, y_2, \dots, y_{i-1}$. Вместо разностного уравнения мы получим линейное алгебраическое уравнение, определяющее связь между $y_i(k)$ и последовательностями $u(k)$, $y_1(k)$, $y_1(k+1)$, ..., $y_{i-1}(k)$, $y_{i-1}(k+1)$, ..., $y_{i-1}(k+n_{i-1}-1)$.

§ 13.2 Метод наименьших квадратов

В большинстве практических случаев измеренные значения входных и выходных величин недостаточно точны, чтобы пользоваться детерминированными методами. Обычно на полезные входные сигналы объекта u налагаются неизмеримые возмущающие сигналы w, а выходные переменные измеряются с ошибкой v. В этом случае уравнения состояния можно записать в виде

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k) + w(k), \tag{13.31}$$

$$y(k) = Cx(k) + Du(k) + v(k), \tag{13.32}$$

где $v(k)$ и $w(k)$ — случайные величины, о которых мы либо ничего не знаем, либо знаем только некоторые статистические свойства. В зависимости от нашей априорной информации о случайных величинах v и w мы можем сформулировать задачу идентификации и предложить различные процедуры решения этой задачи. В этом параграфе мы будем заниматься методом наименьших квадратов, который относится к одному из старейших классических статистических методов.

С тех пор как этот метод был предложен и использован К.Ф. Гауссом в 1795 г. для расчета движения небесных тел [1809.1], он нашел применение в самых различных областях, что позволило рассмотреть целый ряд задач с единой точки зрения. Ниже метод наименьших квадратов применяется для нахождения параметров модели управляемого объекта или, другими словами, для идентификации динамических свойств разомкнутой системы.

13.2.1. Математические модели управляемого объекта. Прежде чем перейти к непосредственному решению рассматриваемой задачи, следует отметить, что идентификацию динамических свойств управляемого объкта можно существенно облегчить, если при расчетах выбрать такую математическую модель объекта, которая позволяет описать его свойства наименьшим числом параметров. Кроме того, следует учесть, что при обработке результатов измерений входов и выходов объекта можно использовать только наблюдаемую и достижимую часть системы. Таким образом, описание уравнениями состояния не является наиболее удобным для решения поставленной задачи. Мы не будем обсуждать здесь различные математические модели, поскольку им посвящена специальная литература [71.21, 73.18, 74.7]. Мы ограничим обсуждение линейной регрессионной моделью с конечной памятью, которую для многомерных систем ввел В. Петерка. В общем случае регрессионная модель может быть представлена выражением

$$y(k) = r(k, y_{(0)}^{(k-1)}, u_{(0)}^{(k)}, v_{(0)}^{(k-1)}) + e(k), \tag{13.33}$$

где $y_0^{(k-1)}$ обозначает последовательность $y(0), y(1), \ldots, y(k-1)$ (аналогичные обозначения применяются и к другим переменным), $r(k)$ — условное среднее, определяемое выражением

$$r(k) = \mathcal{E}(y(k) \mid y_{(0)}^{(k-1)}, u_{(0)}^{(k)}, v_{(0)}^{(k-1)}) = \int y(k) p(y(k) \mid y_{(0)}^{(k-1)}, u_{(0)}^{(k)}, v_{(0)}^{(k-1)}) dy(k),$$

в котором $e(k)$ — случайная компонента в преобразовании выходного вектора $y(k)$, выраженного функцией регрессии $r(k)$ на предыстории входных и выходных сигналов.

Ко входным переменным относятся управляющие переменные, т.е. компоненты вектора u, и независимые входные переменные, например, возмущающие переменные, которые являются компонентами вектора v. Для ясности и простоты последующего изложения входную переменную v можно опустить без потери общности решения.

Случайная величина $e(k)$ имеет следующие свойства.

(а) Нулевое среднее:

$$\mathcal{E}[e(k)] = 0. \tag{13.34}$$

(б) Переменная $e(k)$ не зависит от последнего значения входного сигнала и от всех предыдущих входных и выходных значений сигналов, так что

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}[e(k)u^{\mathrm{T}}(k-\kappa)] = 0 \quad \text{при } \kappa = 0,1,2,\ldots,k, \\ &\mathcal{E}[e(k)y^{\mathrm{T}}(k-\kappa)] = 0 \quad \text{при } \kappa = 1,2,\ldots,k. \end{aligned} \tag{13.35}$$

(в) Последовательность $e(k)$, $k = 0,1,\ldots,$ — это последовательность взаимно некоррелированных случайных величин:

$$\mathcal{E}[e(k)e^{\mathrm{T}}(k-\kappa)] = 0 \quad \text{при } \kappa = 1,2,\ldots,k. \tag{13.36}$$

Для случая обобщенной линейной стационарной регрессионной модели с конечной памятью уравнение (13.33) можно записать в виде

$$y(k) = \sum_{i=1}^{N} Q_i y(k-i) + \sum_{i=1}^{N} P_i u(k-i) + e(k) \tag{13.37}$$

при условии, что все переменные измеряются относительно их средних значений, ковариационная матрица

$$R = \mathcal{E}[e(k)e^{\mathrm{T}}(k)] \tag{13.38}$$

соответствует одинаково распределенному случайному вектору $e(k)$, а Q_i и P_i — матрицы коэффициентов регрессии.

ификации динамических

Прежде чем перейти к
следует отметить, что
та можно существенно
ю модель объекта, ко-
араметров. Кроме того,
одов и выходов объекта
ь системы. Таким обра-
удобным для решения
е математические моде-
73.18, 74.7]. Мы огра-
чной памятью, которую
регрессионная модель

(13.33)

$y(k-1)$ (аналогичные
условное среднее, опре-

$^{(k)}_{(0)}, v^{(k-1)}_{(0)})dy(k),$

ыходного вектора $y(k)$,
входных и выходных

нные, т.е. компоненты
озмущающие перемен-
сти и простоты после-
без потери общности

(13.34)

дного сигнала и от всех

(13.35)

вательность взаимно

(13.36)

й модели с конечной

(13.37)

их средних значений,

(13.38)

у $e(k)$, а Q_i и P_i –

Обобщенная регрессионная модель является удобной моделью линейной динамической системы с измеримыми входными и выходными величинами. Более простыми линейными регрессионными моделями, которые следуют из обобщенной модели (13.37), являются следующие: обычная линейная регрессионная модель

$$y(k) = \sum_{i=0}^{N} P_i u(k-i) + e(k)$$

и линейная авторегрессионная модель

$$y(k) = \sum_{i=1}^{N} Q_i y(k-i) + e(k).$$

Для разомкнутой системы входные значения $u(k-i)$ можно считать неслучайными. В замкнутых же системах значения $u(k)$ вычисляются по предыдущим значениям выходных величин. Таким образом, значения $u(k)$ зависят от предыдущих значений $y(k)$, которые в силу помехи v представляют наблюдаемые значения случайной переменной y. Отсюда следует, что все переменные в замкнутой системе, которая описывается обобщенной регрессионной моделью (13.37) или ее простыми вариантами, – случайные величины.

Уравнение (13.37) можно записать в следующей простой форме:

$$y(k) = \Theta^{\mathsf{T}} z(k) + e(k), \qquad k = 1, 2, \dots, \tag{13.39}$$

где

$$\Theta^{\mathsf{T}} = [P_N, Q_N, \dots, P_1, Q_1, P_0],$$
$$z^{\mathsf{T}}(k) = [u^{\mathsf{T}}(k-N), y^{\mathsf{T}}(k-N), \dots, u^{\mathsf{T}}(k-1), y^{\mathsf{T}}(k-1), u^{\mathsf{T}}(k)]. \tag{13.40}$$

При r входах и p выходах матрица Θ^{T} имеет блоки P_i, $i = 0, 1, \dots, N$, и Q_j, $j = 1, 2, \dots, N$, размерности $(p;\ r)$ и $(p;\ p)$ соответственно. Тогда размерность матрицы Θ^{T} равна $(p;\ \nu)$, где $\nu = N(p+r) + r$. Матрицы Θ^{T} и $z(k)$ могут иметь, конечно, другое внутреннее строение, например, согласно принципу, примененному в уравнении (13.19). Отметим также связи рассматриваемых моделей с некоторыми другими математическими моделями объектов.

Модель (13.37) представляет специальный случай регрессионной модели с бесконечной памятью, когда $N \to \infty$. Ограничившись конечным числом параметров, мы полагаем теперь, что матрицы Q_i и P_i независимы только при $i \leqslant n$, а для всех значений $i > n$ они линейно зависимы в соответствии со следующими соотношениями:

$$Q_i = -\sum_{j=1}^{n} C_j Q_{i-1}, \qquad P_i = -\sum_{j=1}^{n} C_j P_{i-1}. \tag{13.41}$$

Если в регрессионной модели с бесконечной памятью принять $Q_0 = -\mathrm{E}$ и заменить k на $k-j$, то мы получим

$$-\sum_{i=0}^{\infty} Q_i y(k-j-i) = \sum_{i=0}^{\infty} P_i u(k-j-i) + e(k-j),$$

или, если положить $j + i = l$, окончательно

$$-\sum_{l=j}^{\infty} Q_{l-j} y(k-l) = \sum_{l=j}^{\infty} P_{l-j} u(k-l) + e(k-j).$$

Умножим теперь это соотношение слева на матрицу коэффициентов C_j и просуммируем полученное соотношение по $j = 0, 1, 2, \dots, n$. Тогда с учетом соотношения

(13.41) мы получим

$$\sum_{l=0}^{n} A_l y(k-l) = \sum_{l=0}^{n} B_l u(k-l) + \sum_{l=0}^{n} C_l e(k-l), \tag{13.42}$$

где

$$A_0 = C_0 = \text{E}, \quad A_l = -\sum_{j=0}^{l} C_j Q_{l-j}; \qquad B_l = \sum_{j=0}^{l} C_j P_{l-j}.$$

Уравнение (13.42) — стохастическое разностное уравнение.

Введем оператор запаздывания

$$y(k-l) = E^{-1} y(k). \tag{13.43}$$

Это позволяет записать следующие полиномы:

$$\begin{aligned} Q(E) &= \text{E} - Q_1 E^{-1} - Q_2 E^{-2} - \ldots - Q_N E^{-N}, \\ P(E) &= P_0 + P_1 E^{-1} + P_2 E^{-2} + \ldots + P_N E^{-N}; \end{aligned} \tag{13.44}$$

$$\begin{aligned} A(E) &= \text{E} + A_1 E^{-1} + A_2 E^{-2} + \ldots + A_n E^{-n}, \\ B(E) &= B_0 + B_1 E^{-1} + B_2 E^{-2} + \ldots + B_n E^{-n}, \\ C(E) &= \text{E} + C_1 E^{-1} + C_2 E^{-2} + \ldots + C_n E^{-n}. \end{aligned} \tag{13.45}$$

Для импульсной модели введем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} S(E) &= S_0 + S_1 E^{-1} + S_2 E^{-2} + \ldots + S_M E^{-M}, \\ F(E) &= \text{E} + F_1 E^{-1} + F_2 E^{-2} + \ldots + F_M E^{-M}, \end{aligned} \tag{13.46}$$

где $M \to \infty$ для модели с бесконечной памятью.

С помощью этих соотношений можно легко установить взаимную связь между отдельными моделями и их физическую интерпретацию.

Уравнение регрессионной модели (13.37) принимает вид

$$Q(E) y(k) = P(E) u(k) + e(k). \tag{13.47}$$

Стохастическое разностное уравнение можно теперь записать в виде

$$A(E) y(k) = B(E) u(k) + C(E) e(k). \tag{13.48}$$

Для полноты укажем также уравнение импульсной модели

$$y(k) = S(E) u(k) + F(E) e(k). \tag{13.49}$$

При рассмотрении линейных зависимостей между отдельными временны́ми последовательностями можно считать, что выход объекта представляет из себя линейную комбинацию идеального выхода y^* и помехи e^*, так что

$$y(k) = y^*(k) + e^*(k). \tag{13.50}$$

Такому подходу лучше всего подходит импульсная модель (13.49), где

$$y^*(k) = S(E) u(k) \tag{13.51}$$

и

$$e^*(k) = F(E) e(k).$$

Соответствующая блок-схема показана на рис. 13.1. Если сравнить регрессионную модель (13.47) и модель (13.49), которая представлена на рис. 13.1, то будем иметь

$$S(E) = Q^{-1}(E) P(E), \qquad F(E) = Q^{-1}(E). \tag{13.52}$$

Для стохастического разностного уравнения мы получим аналогично

$$S(E) = A^{-1}(E) B(E), \qquad F(E) = A^{-1}(E) C(E). \tag{13.53}$$

Обратный оператор в уравнениях (13.52) и (13.53) можно вычислить, сравнивая матрицы коэффициентов при одинаковых степенях E. Например, для первого из

уравнений (13.53) мы по

$$A(E) S(E) = B(E), \quad S_i =$$

13.2.2. Сумма наименьши
пользоваться моделью (
сведена к этой форме.

Запишем уравнение (1

$$y^{\mathrm{T}}(k) = z^{\mathrm{T}}(k)\Theta + e^{\mathrm{T}}(k),$$

где компоненты векторо
менными $y_i(k)$, $i = 1,$
ходами.

Положив теперь в у
следующую систему лине

$$Y = Z\Theta + E_e,$$

где

$$Y = \begin{bmatrix} y_1(1) & y_2(1 \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ y_1(K) & y_2(K \end{bmatrix}$$

$$Z = \begin{bmatrix} u_1(1-N) & \ldots & u_r(\\ \ldots\ldots\ldots & & \\ u_1(K-N) & \ldots & u_r(\end{bmatrix}$$

Размерности матриц Y,
$(K; p)$, где $\nu = N(p + r)$
ветствующая объекту с о

$$y = Z\vartheta + e,$$

где в соответствии с пр
рицы-столбцы и вектор
одним входом и одним
дами, по существу, сов
объект с одним входом и

Сумма квадратов о
(13.57) равна

$$J = (y - Z\vartheta)^{\mathrm{T}}(y - Z\vartheta)$$

(13.42)

(13.43)

(13.44)

(13.45)

(13.46)

взаимную связь между

(13.47)

виде

(13.48)

(13.49)

ыми временными пос-
тавляет из себя линей-

(13.50)

.49), где

(13.51)

равнить регрессионную
13.1, то будем иметь

(13.52)

тично

(13.53)

вычислить, сравнивая
мер, для первого из

уравнений (13.53) мы получим

$$A(E)S(E) = B(E), \qquad S_i = -\sum_{j=1}^{i} A_j S_{i-j} + B_i, \qquad i = 1, 2, \ldots \tag{13.54}$$

13.2.2. Сумма наименьших квадратов. При вычислении параметров объекта мы будем пользоваться моделью (13.39), поскольку любая модель из п. 13.2.1 может быть сведена к этой форме.

Запишем уравнение (13.39) в следующем виде:

$$y^{\mathrm{T}}(k) = z^{\mathrm{T}}(k)\Theta + e^{\mathrm{T}}(k), \tag{13.55}$$

где компоненты векторов $y^{\mathrm{T}}(k)$ и $e^{\mathrm{T}}(k)$ соответствуют отдельным выходным переменными $y_i(k)$, $i = 1, 2, \ldots, p$, объекта со многими входами и многими выходами.

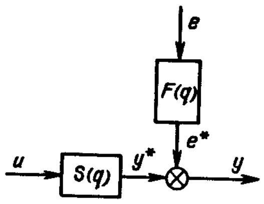

Рис. 13.1. Импульсная модель объекта.

Положив теперь в уравнении (13.55) $k = 1, 2, \ldots, K$, где $K \geqslant \nu$, мы получим следующую систему линейных уравнений:

$$Y = Z\Theta + E_e, \tag{13.56}$$

где

$$Y = \begin{bmatrix} y_1(1) & y_2(1) & \ldots & y_p(1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1(K) & y_2(K) & \ldots & y_p(K) \end{bmatrix},$$

$$Z = \begin{bmatrix} u_1(1-N) & \ldots & u_r(1-N) & y_1(1-N) & \ldots & y_p(1-N) \ldots & u_1(1) & \ldots & u_r(1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_1(K-N) & \ldots & u_r(K-N) & y_1(K-N) & \ldots & y_p(K-N) \ldots & u_1(K) & \ldots & u_r(K) \end{bmatrix}.$$

Размерности матриц Y, Z, Θ и E_e равны соответственно $(K;\, p)$, $(K;\, \nu)$, $(\nu;\, p)$ и $(K;\, p)$, где $\nu = N(p + r) + r$. Из уравнения (13.56) следует более простая форма, соответствующая объекту с одним входом и одним выходом:

$$y = Z\vartheta + e, \tag{13.57}$$

где в соответствии с предыдущими обозначениями строчные буквы обозначают матрицы-столбцы и векторы. Поскольку процедуры идентификации для объектов с одним входом и одним выходом и объектов со многими входами и многими выходами, по существу, совпадают, мы будем далее рассматривать без потери общности объект с одним входом и одним выходом.

Сумма квадратов оценок компонент случайного вектора $e(k)$ из уравнения (13.57) равна

$$J = (y - Z\vartheta)^{\mathrm{T}}(y - Z\vartheta). \tag{13.58}$$

Предполагая, что матрица Z^TZ невырождена, мы вычислим вектор искомых параметров из следующего условия:

$$\frac{\partial J}{\partial \vartheta} = 0.$$

При этом матрица

$$\frac{\partial J}{\partial \vartheta}\left[\frac{\partial J}{\partial \vartheta}\right]^T$$

должна быть положительно определенной. Мы получим

$$\hat{\vartheta} = (Z^TZ)^{-1}Z^Ty, \tag{13.59}$$

где $\hat{\vartheta}$ — оценка в смысле выбранной функции потерь. Решение (13.59) выражается классической фс мулой, которую можно найти в литературе по математической статистике, наприме, в [58.1]. Для численных расчетов эта формула, однако, не очень удобна. В приложении Г будет приведен другой подход, наиболее приспособленный для численных расчетов.

13.2.3. Геометрическая интерпретация. Обозначим отдельные столбцы матрицы Z в уравнении (13.57) через ζ_i, $i = 1,2, \ldots, \nu$, где $\nu = 2N + 1$, а элементы матрицы-столбца ϑ — через π_i, $i = 1,2, \ldots, \nu$. С помощью этих обозначений мы можем записать уравнение (13.57) в виде

$$y = \sum_{i=1}^{\nu} \zeta_i \pi_i + e. \tag{13.60}$$

Будем теперь считать, что векторы y и ζ_i, $i = 1,2, \ldots, \nu$, принадлежат K-мерному евклидову пространству. Тогда метод наименьших квадратов можно сформулировать как задачу аппроксимации вектора y линейной комбинацией векторов ζ_i, $i = 1,2, \ldots, \nu$, таким образом, чтобы значение $\|e\|^2$ было минимальным. Известно, что решение этой задачи получается ортогональным проектированием этого вектора на отдельные векторы ζ_i, $i = 1,2, \ldots, \nu$, евклидова пространства. Если y^* — ортогональная проекция y, то $y - y^*$ — вектор, нормальный ко всем векторам ζ_i, $i = 1,2, \ldots, \nu$, и, следовательно, соответствующие скалярные произведения равны нулю:

$$(y - y^*)^T\zeta_i = 0, \qquad i = 1,2, \ldots, \nu. \tag{13.61}$$

Если обозначить

$$y^* = \sum_{i=1}^{\nu} \zeta_i \pi_i, \tag{13.62}$$

то систему уравнений (13.61) можно записать в виде

$$y^T[\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_\nu] =$$

$$= [\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_\nu]\begin{bmatrix} \zeta_1^T\zeta_1 & \zeta_1^T\zeta_2 & \ldots & \zeta_1^T\zeta_\nu \\ \zeta_2^T\zeta_1 & \zeta_2^T\zeta_2 & \ldots & \zeta_2^T\zeta_\nu \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \zeta_\nu^T\zeta_1 & \zeta_\nu^T\zeta_2 & \ldots & \zeta_\nu^T\zeta_\nu \end{bmatrix}, \tag{13.63}$$

$$y^TZ = \vartheta^TZ^TZ.$$

После транспонирования этого уравнения мы можем определить искомую матрицу коэффициентов $\hat{\vartheta}$. Решение совпадает с решением (13.59). Если векторы ζ_i линейно зависимы, то решение не будет однозначным. Однозначное решение можно получить, уменьшив число параметров так, чтобы их число равнялось числу линейно независимых векторов ζ_i.

13.2.4. Увеличение чис
следовательно, соответств
вестно. В этом случае мы
и увеличиваем их число,
Было бы неразумным п
зависимо от того, что пол
казано [68.2], каким об
Предположим, что мат
личиваем это число до n_2
сионной модели с n_1 до n
с двумя блоками

$Z = [Z_1, Z_2]$.

Аналогично можно поступ

$\vartheta_{12} = \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \end{bmatrix}$.

Блок Z_1 матрицы Z (13.
Размерность матрицы Z
имеет n_1 элементов, а вект
Уравнение (13.59) тепе

$\begin{bmatrix} Z_1^TZ_1 & Z_1^TZ_2 \\ Z_2^TZ_1 & Z_2^TZ_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \hat{\vartheta}_1 \\ \hat{\vartheta}_2 \end{bmatrix}$

или

$Z_1^TZ_1\hat{\vartheta}_1 + Z_1^TZ_2\hat{\vartheta}_2 = Z_1^T$

Решая эту систему уравне

$\hat{\vartheta}_1 = \hat{\vartheta} + P_3Z_2^T(Z_1\hat{\vartheta} - y)$

Мы можем также определи

$\begin{bmatrix} Z_1^TZ_1 & Z_1^TZ_2 \\ Z_2^TZ_1 & Z_2^TZ_2 \end{bmatrix}^{-1} =$

В выражениях (13.68) и (

$\hat{\vartheta} = (Z_1^TZ_1)^{-1}Z_1^Ty,$

$P_2 = [Z_2^TZ_2 - Z_2^TZ_1(Z_1^T$

Из предыдущих соотнош
метров достаточно обрат
что приведенные выше
ляется только тогда, ко
мала.

13.2.5. Увеличение дл
чаются с ситуацией, когд
ется. При больших K н
дущие данные, имеющи
например, на единицу и
намические свойства объ
Если, как и в п. 13.2.
выходом, то для реку
обозначения:

$y_{K+1} = \begin{bmatrix} y_K \\ y \end{bmatrix},$ Z

где

$z^T = [u(K+1-N), y($