СОСТОЯНИЕ СИСТЕМЫ

§ 2.1. Вход, состояние и выход

Динамика системы описывается ее математической моделью. Такая модель отражает математические зависимости между тремя множествами переменных: переменными входа, выхода и состояния.

Вход системы, выражаемый либо множеством временных функций, либо множеством временных последовательностей входных значений, представляет внешние переменные, действующие на систему. Выход системы, выражаемый аналогично входу, представляет описание непосредственно наблюдаемого поведения системы.

Основное свойство любой динамической системы заключается в том, что ее поведение в любой момент времени зависит не только от переменных, действующих на нее в данный момент времени, но и от переменных, действовавших на нее в прошлом. Мы можем считать, что такая система обладает "памятью", которая позволяет учитывать вклад переменной, действовавшей на нее с прошлого момента времени до момента наблюдения ее поведения. Состояние системы, определяемое как множество значений так называемых переменных состояния, представляет мгновенное значение "ячейки" этой памяти. Если в произвольный момент времени t_0 известны состояние и входной отрезок $u(t_0, t]$, то в любой момент времени $t \geqslant t_0$ могут быть определены выход и состояние системы.

Приведенное выше определение состояния является весьма приближенным. Оно дает всего лишь предварительную информацию о понятиях "состояние" и "переменные состояния". Точное определение приводится в § 2.2.

Понятие "динамическая система" также весьма приближенно. Обычный смысл выражения "динамический" почти тот же самый, что и у выражения "причинный": прошлые события влияют на будущие события, но не наоборот. Математическое описание динамической системы приводит к подчеркиванию и формализации направления причинности от прошлого к будущему. С математической точки зрения динамическая система является аксиоматическим понятием. Мы принимаем здесь определение, данное Р. Калманом [69.4].

Определение 2.1. *Динамической системой* Σ *называется сложный математический объект, определяемый следующими аксиомами.*

(а) *Заданы следующие множества: множество моментов времени* T, *множество состояний* X, *множество входных значений* U, *множество допустимых входных функций* $\Omega = \{\omega\colon T \to U\}$, *множество выходных значений* Y *и множество выходных функций* $\Gamma = \{\gamma\colon T \to Y\}$.

(б) (Направление времени.) *Множество* T — *упорядоченное подмножество множества действительных чисел.*

(в) *Пространство допустимых входных функций* Ω *удовлетворяет следующим условиям:*

(1) (Нетривиальность.) *Множество* Ω *непусто.*

(2) (Сочленение входных воздействий.) *Входной отрезок* $\omega(t_1, t_2]$ — *функция* $\omega \in \Omega$, *заданная на временном интервале* $(t_1, t_2] \cap T$. *Если* $\omega, \omega' \in \Omega$ *и* $t_1 < t_2 < t_3$, *то найдется функция* $\omega'' \in \Omega$, *для которой* $\omega''(t_1, t_2] = \omega(t_1, t_2]$ *и* $\omega''(t_2, t_3] = \omega'(t_2, t_3]$.

(г) *Задана переходная функция состояния* φ, *которая определяет состояние* $x(t) = \varphi(t;\ \tau, x, \omega) \in X$, *достигнутое в момент времени* $t \in T$ *при входном воздействии*

$\omega \in \Omega$, если в нача
Функция φ обладает
(1) (Направление
обязательно определе
(2) (Согласованн
$x \in X$ и $\omega \in \Omega$.
(3) (Композицио
стояний $x \in X$ и все
$x, \omega), \omega)$.
(4) (Причинность
$= \varphi(t;\ \tau, x, \omega')$.
(д) *Существует о*
чину $y(t) = \eta(t, x(t$
ходным отрезком, т
дана на интервале $(\tau,$
Отметим, что пара
системе Σ. Множеств
ме Σ.
Система является
ный момент времени
вали на систему до мо
Иногда полезно р
и состояние которой
момента t_0 включите
$\to\ Y$, определяюще
$= \eta(\sigma, \varphi(\sigma;\ \tau, x, \omega),$
Система называетс
можно достоверно о
вестному входу из по
Система называетс
момент времени t_0
системы и ее состоян
или другими статисти
Поскольку вход,
то мы будем предста
состоящий из m пере

$u^{\mathrm{T}} = [u_1, u_2, \ldots, u$

Аналогично этому с
Так, например, в ли
последовательного со
ставлено переменны
этих звеньев. Обознач
В качестве переме
выходной переменной
ции, которые обычн
которые образуют в
Отсюда следует, что
важно только, чтобы
выборе компонент в
состояния, которые
могут быть измерены
Выход объекта та
однозначно определя
дать с вектором сост
дать с некоторыми пе
те, который состоит
рядка, выходная пе

кая модель отражает
енных: переменными

кций, либо множест-
вляет внешние пере-
й аналогично входу,
истемы.
в том, что ее пове-
ых, действующих на
х на нее в прошлом.
орая позволяет учи-
ента времени до мо-
емое как множество
мгновенное значение
известны состояние
могут быть опреде-

приближенным. Оно
яние" и "переменные

бычный смысл выра-
ричинный": прошлые
ическое описание ди-
направления причин-
инамическая система
определение, данное

ся сложный матема-

емени T, множество
мых входных функ-
тво выходных функ-

подмножество мно-

творяет следующим

$(t_1, t_2]$ — функция
$\in \Omega$ и $t_1 < t_2 < t_3$,
$, t_2]$ и $\omega''(t_2, t_3]$ =

ет состояние $x(t)$ =
ходном воздействии

$\omega \in \Omega$, если в начальный момент времени $\tau \in T$ начальное состояние $x = x(\tau) \in X$. Функция φ обладает следующими свойствами:

(1) **(Направление времени.)** *Функция φ определена для всех значений $t \geqslant \tau$ и необязательно определена для всех значений $t < \tau$.*

(2) **(Согласованность.)** *Равенство $\varphi(t;\ t, x, \omega) = x$ выполняется при всех $t \in T$, $x \in X$ и $\omega \in \Omega$.*

(3) **(Композиционное свойство.)** *Для любых значений $t_1 < t_2 < t_3$ и любых состояний $x \in X$ и всех входов $\omega \in \Omega$ имеет место $\varphi(t_3;\ t_1, x, \omega) = \varphi(t_3;\ t_2, \varphi(t_2;\ t_1, x, \omega), \omega)$.*

(4) **(Причинность.)** *Если $\omega, \omega' \in \Omega$ и $\omega(t, \tau] = \omega'(t, \tau]$, то $\varphi(t;\ \tau, x, \omega) = \varphi(t;\ \tau, x, \omega')$.*

(д) *Существует отображение выхода η: $T \times X \to Y$, определяющее выходную величину $y(t) = \eta(t, x(t))$. Отображение $\eta(\sigma, \varphi(\sigma;\ \tau, x, \omega))$ при $\sigma \in (\tau, t]$ является выходным отрезком, т.е. отрезком $\gamma(\tau, t]$ некоторой выходной функции, которая задана на интервале $(\tau, t]$.*

Отметим, что пара (τ, x), где $\tau \in T$ и $x \in X$, представляет событие в динамической системе Σ. Множество $T \times X$ определяет пространство событий в динамической системе Σ.

Система является *физически реализуемой*, если ее выход и состояние в произвольный момент времени t_0 является функцией только тех входов, которые воздействовали на систему до момента времени t_0.

Иногда полезно рассматривать как физически реализуемую такую систему, выход и состояние которой подвержены воздействию $u(t, t_0]$, т.е. воздействию вплоть до момента t_0 включительно. В этом случае существует отображение выхода η: $T \times X \times U \to Y$, определяющее выходную величину $y(t) = \eta(t, x(t), u(t))$ или $y(\sigma) = \eta(\sigma, \varphi(\sigma;\ \tau, x, \omega), u(\sigma))$ при $\sigma \in (\tau, t]$.

Система называется *детерминированной*, если ее выход и состояние в любой момент t можно достоверно определить по ее состоянию в некоторый момент $t_0 < t$ и по известному входу из полузамкнутого интервала $[t_0, t)$.

Система называется *стохастической*, если информация о ее состоянии в некоторый момент времени t_0 и о ее входе на интервале $[t_0, t)$ позволяет определить выход системы и ее состояние в момент времени $t > t_0$ только с определенной вероятностью или другими статистическими средствами.

Поскольку вход, состояние и выход описываются конечным числом переменных, то мы будем представлять их векторами. Так, например, вход управляемого объекта, состоящий из m переменных, обозначается вектором

$$u^{\mathrm{T}} = [u_1, u_2, \ldots, u_m] = [u_i], \qquad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Аналогично этому состояние объекта выражается вектором переменных состояния. Так, например, в линейном управляемом объекте n-го порядка, который состоит из последовательного соединения n звеньев первого порядка, состояние может быть представлено переменными, измеряемыми между отдельными звеньями и в конце цепочки этих звеньев. Обозначим эти переменные через $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

В качестве переменных состояния могут быть выбраны, например, производные выходной переменной $x_1(t), dx_1(t)/dt, \ldots, d^{n-1}x_1(t)/dt^{n-1}$ или любые другие функции, которые обычно являются линейной комбинацией таких переменных системы, которые образуют вектор состояния, полностью определяющий состояние системы. Отсюда следует, что выбор компонент вектора состояния достаточно произволен, важно только, чтобы эти компоненты полностью описывали состояние системы. При выборе компонент вектора состояния мы отдаем предпочтение таким переменным состояния, которые позволяют упростить необходимые расчеты или которые легко могут быть измерены и т.д.

Выход объекта также выражается вектором выходных переменных. Этот вектор однозначно определяется вектором состояния. Выходной вектор может даже совпадать с вектором состояния, либо выходные переменные могут непосредственно совпадать с некоторыми переменными вектора состояния. Например, в управляемом объекте, который состоит из цепочки последовательно соединенных звеньев первого порядка, выходная переменная цепи x_1 является одной из компонент как вектора состояния

$$x^{\mathrm{T}} = [x_1, x_2, \ldots, x_n],$$

так и вектора состояния

$$x^{\mathrm{T}} = \left[x_1(t), \frac{dx_1(t)}{dt}, \ldots, \frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}} \right].$$

Множество всех возможных входов u назовем пространством входов U. Аналогично множество всех возможных состояний системы x будет называться пространством состояний X, а множество всех возможных выходов системы y — пространством выходов Y.

Если векторы входа, состояния и выхода определены в каждый момент времени t из некоторого интервала (непрерывное время), то мы говорим о *непрерывной системе, непрерывном управляемом объекте* и т.д. Если векторы входа и состояния определены только в дискретные моменты времени t_k, где k является последовательностью чисел, обычно целых из некоторого интервала, то мы говорим о *дискретных системах*.

§ 2.2. Определение состояния системы по Заде

Хотя в литературе пространство состояний очень часто применяется для описания динамических систем, все же трудно дать удовлетворительное определение состояния и переменных состояния. Возможно, что наиболее удачным является определение Л. Заде [63.9], в котором вводятся понятия состояния системы и переменных состояния.

Рассмотрим систему Σ, т.е. математическую модель реальной системы со входами u_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, и выходами y_j, $j = 1, 2, \ldots, p$. Предполагается, что u_i и y_j являются функциями времени и $u_i(t)$ и $y_j(t)$ обозначают значения этих величин в момент времени t. Множество входов u_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, выражается вектором входов u и, аналогично, множество выходов выражается вектором выходов y.

Мы обозначим множество всех возможных входных векторов, т.е. вектор-функций времени $u(t)$, которые могут появиться на входе системы Σ, символом Ω. Это пространство входных функций системы Σ. Множество всех значений, принимаемых вектором u в момент времени t, обозначается как пространство входов U системы Σ в момент времени t. Если пространство входов U является конечным множеством, то оно обычно называется входным алфавитом. В большинстве случаев, которые мы будем здесь рассматривать, пространство входов будет евклидовым пространством E^n.

Рассмотрим теперь следующий эксперимент. Пусть система Σ с начального момента t_0 вплоть до момента t_1, $t_1 \geqslant t_0$, находится под воздействием входных переменных u. Из опыта известно, что выходной вектор $y_0(t_0, t_1]$ зависит, в общем, не только от входного вектора $u(t_0, t_1]$, но также и от начальных условий системы Σ в момент начала эксперимента. Можно сказать, что эти начальные условия образуют начальное состояние системы Σ. Поэтому, имея начальное состояние $x(t_0)$ системы Σ, мы можем утверждать, что выход $y(t_0, t_1)$ зависит от $x(t_0)$ и $u(t_0, t_1)$, но не зависит от значений u до момента времени t_0. Другими словами, начальное состояние и последующее входное значение u — это все, что нам необходимо знать для определения выхода y после приложения входа u.

Начальные условия системы Σ могут быть, вообще, выражены различными способами. Поэтому возникает вопрос, может ли некоторое описание начальных условий выступать в качестве начального состояния системы Σ. Предположим, что $x(t_0)$ является переменным вектором, который может принимать значения внутри пространства X. Назовем это пространство пространством состояний системы Σ и предположим для простоты, что X не зависит от t_0. Кроме того, пусть $x(t) = \alpha$ — состояние системы Σ, где α — элемент пространства X. При этих предположениях мы можем сформулировать теперь следующее определение.

Определение 2.2. *Переменная $x(t)$ может быть принята за состояние системы Σ в момент t, если она удовлетворяет следующим трем условиям согласованности*:

(1) *Векторы* $x(t_0$ …
замкнутом интервале …
всех начальных состо…
функций $u \in \Omega$.
Мы имеем

$y(t_0, t] = F[x(t_0); u$ …

или

$y(t) = F[x(t_0); u(t_0,$ …

Замечание 2.1. …
системой (не имеет с…
системе настоящее зна…

(2) *Пусть* t_1 *— нек*…
ного вектора $u(t_0, t]$ …
риваются с момента в…
вует непустое подм…
$S[x(t_0); u(t_0, t]]$, *ка*…

$y(t_1, t] = F[\alpha, u(t_0,$ …

Замечание 2.2. …
соответствует начально…

(3) *Если* $u(t_0, t]$ …
ного пространства вхо…
рассматриваемых на вс…

Замечание 2.3. …
ного состояния в прос…
дов и выходов $u(t_1, t]$ …

Из условий (2) и (…
деляется начальным со…

$x(t) = G[x(t_0); u(t_0,$ …

где G — однозначная …
состояния α' и α'' экви…
странства входов сист…
нию α', совпадает с реа…

В приведенном выш…
симая переменная вре…
пично для управления с…

При квантовании по…
мент квантования кон…
нимальным числом эл…
мени k принимает це…
$x_i(k)$, $i = 1, 2, \ldots, n,$ …
компоненты вектора …
жет быть описано ра…

$x(k+1) = f[x(k)]$, …

где $k = 0, 1, 2, \ldots$ Ура…

$x(1) = \Phi(1, x_0) = f(x_0$ …

Из уравнения (2.6) сл…
можно рассматривать …
$= f(x)$. Тогда

$x(2) = \Phi[2, x(1)] = \Phi$ …

и в общей форме

$x(\nu) = \Phi(\nu, x_0) = F^{\nu}(x$ …

Вычисление приведенн…
тельную k-ю итерацию в…

(1) *Векторы* $x(t_0)$ *и* $u(t_0, t]$, *где* $u(t_0, t]$ *обозначает входной отрезок на полузамкнутом интервале* $(t_0, t]$, *однозначно определяют выходной отрезок* $y(t_0, t]$ *для всех начальных состояний* $x(t_0) \in X$ *при всех значениях* $t \geqslant t_0$ *и для всех входных функций* $u \in \Omega$.

Мы имеем

$$y(t_0, t] = F[x(t_0);\ u(t_0, t]], \tag{2.1}$$

или

$$y(t) = F[x(t_0);\ u(t_0, t]]. \tag{2.2}$$

Замечание 2.1. Из предыдущего следует, что Σ является детерминированной системой (не имеет случайных элементов) и не является упреждающей, т.е. в этой системе настоящее значение выхода не зависит от будущих значений входа.

(2) *Пусть* t_1 *— некоторый момент времени между* t_0 *и* t. *Тогда для каждого входного вектора* $u(t_0, t]$ *и наблюдаемого выходного вектора* $y(t_0, t]$, *которые рассматриваются с момента времени* t_1, *так что они дают отрезки* $u(t_1, t]$ *и* $y(t_1, t]$, *существует непустое подмножество элементов из пространства* X, *обозначаемое через* $S[x(t_0);\ u(t_0, t]]$, *каждый элемент* α *которого удовлетворяет соотношению*

$$y(t_1, t] = F[\alpha, u(t_0, t]]. \tag{2.3}$$

Замечание 2.2. Это условие гарантирует, что каждой паре $u(t_0, t]$ и $y(t_1, t]$ соответствует начальное состояние $x(t_1)$ из X.

(3) *Если* $u(t_0, t]$ *неизменно, а* $u(t_1, t)$ *изменяется на всех входах функционального пространства входов системы* Σ, *то пересечение множеств* $S[x(t_0);\ u(t_0, t]]$, *рассматриваемых на всех значениях* $u(t_1, t)$, *не является пустым множеством.*

Замечание 2.3. Это условие гарантирует существование по крайней мере одного состояния в пространстве X, которое относится ко всем возможным парам входов и выходов $u(t_1, t]$ и $y(t_1, t]$ соответственно.

Из условий (2) и (3) следует, что состояние системы Σ в момент времени t определяется начальным состоянием $x(t_0)$ и входной вектор-функцией $u(t_0, t)$:

$$x(t) = G[x(t_0);\ u(t_0, t]], \tag{2.4}$$

где G — однозначная функция своих аргументов. Следует отметить, что любые два состояния α' и α'' эквивалентны, если для всех значений u из функционального пространства входов системы Σ реакция системы, соответствующая начальному состоянию α', совпадает с реакцией, соответствующей начальному состоянию α''.

В приведенном выше определении и замечаниях не важно, непрерывна ли независимая переменная времени t или она принимает только дискретные значения, что типично для управления с помощью ЦВМ.

При квантовании по времени физическая система может быть описана в любой момент квантования конечным множеством переменных $x_1(k), x_2(k), \ldots, x_n(k)$ с минимальным числом элементов этого множества. Предполагается, что переменная времени k принимает целые значения при постоянном периоде квантования. Значения $x_i(k)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, являются значениями переменных состояния. Они представляют компоненты вектора состояния $x(k)$. Динамическое поведение такой системы может быть описано разностным уравнением или рекуррентным соотношением вида

$$x(k+1) = f[x(k)], \qquad x(0) = x_0, \tag{2.5}$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots$ Уравнение (2.5) легко решить после первого вычисления при $k = 0$:

$$x(1) = \Phi(1, x_0) = f(x_0) = F(x_0). \tag{2.6}$$

Из уравнения (2.6) следует, что значение вектора состояния x в момент времени $k = 1$ можно рассматривать как преобразование $F(x_0)$ начального состояния x_0 при $F(x) = f(x)$. Тогда

$$x(2) = \Phi[2, x(1)] = \Phi[2, \Phi(1, x_0)] = \Phi[2, F(x_0)] = f[x(1)] = f[f(x_0)] = F^2(x_0)$$

и в общей форме

$$x(\nu) = \Phi(\nu, x_0) = F^{\nu}(x_0). \tag{2.7}$$

Вычисление приведенного выше вектора $x(k)$, $k = \nu$ представляет собой последовательную k-ю итерацию вектора x_0.

Глава **3**

УРАВНЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ

§ 3.1. Математические модели систем в пространстве состояний

Математическая модель может быть получена для управляемого объекта, управляющего устройства или для замкнутого контура управления. Если мы знаем физическое описание системы и можем записать уравнения, описывающие поведение ее отдельных частей, то получить уравнение состояния системы обычно очень легко. Мы покажем эту процедуру на нескольких примерах.

Пример 3.1. Получить уравнение состояния механической системы, показанной на рис. 3.1.

Эта система достаточно простая, и для нее обыкновенное дифференциальное уравнение записывается следующим образом:

$$mx''(t) + fx'(t) + kx(t) = P(t). \qquad (3.1)$$

Уравнение состояния можно получить, например, задавшись вектором состояния

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix}. \qquad (3.2)$$

Выбор переменных состояния, однако, неоднозначен. При выбранных переменных состояния уравнение (3.1) принимает вид

$$mv'(t) + fv(t) + kx(t) = P(t), \qquad (3.3)$$

и заданная система может быть теперь описана в пространстве состояний математической моделью

$$\begin{bmatrix} x'(t) \\ v'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{f}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ v(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix} P(t), \qquad (3.4)$$

$$x'(t) = Fx(t) + gu(t), \qquad (3.5)$$

где сила $P(t)$ заменена на $u(t)$ — обычное обозначение входной переменной. Уравнение выхода имеет вид

$$y(t) = h^{\mathrm{T}} x(t), \qquad (3.6)$$

где $h^{\mathrm{T}} = [1, 0]$. Уравнение (3.4) можно решить, т.е. вычислить значения $x(t)$ и $v(t)$ для $t \geqslant t_0$, если мы знаем начальные значения $x(t_0)$, $v(t_0)$ и силу $P(t)$, действующую на систему при $t \geqslant t_0$.

Пример 3.2. Получить уравнение состояния RLC-цепи, показанной на рис. 3.2.

Решение во многом аналогично предыдущему примеру. Динамическое поведение этой системы полностью определяется при $t \geqslant t_0$, если известны начальные значения $i(t_0)$ и $e_C(t_0)$ и входное напряжение $e(t)$ при $t \geqslant t_0$. Следовательно, эта система полностью определяется переменными состояния $i(t)$ и $e_C(t)$. Переменные состояния можно, однако, выбрать по-разному.

Для указанных переменных состояния $i(t)$ и $e_C(t)$ имеем

$$Li'(t) + Ri(t) + e_C(t) = e(t), \qquad (3.7)$$

$$Ce_C'(t) = i(t), \qquad (3.8)$$

или в векторно-матричной форме

$$\begin{bmatrix} i'(t) \\ e_C'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{R}{L} & -\dfrac{1}{L} \\ \dfrac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i(t) \\ e_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} e(t), \qquad (3.9)$$

что представляет собой математическую модель заданной системы в пространстве состояний.

Пример 3.3. Рассмотрим показанный на рис. 3.3 перевернутый маятник, ось которого находится на тележке, приводимой мотором. Внешняя сила $u(t)$ изменяет положение тележки $x(t)$ и маятника. Предполагая, что угол $\varphi(t)$ и $d\varphi(t)/dt$ измеримы, мы можем с помощью соответствующего управляющего устройства обеспечить такую силу $u(t)$, что маятник без учета малых откло-

нений будет оставаться в
печения работы управля
дель устройства управле
состояния этой модели.

Решение. Объект опис

$ml\varphi''(t) + (M+m)x''(t)$

и уравнением равновесия

$(J+ml^2)\varphi''(t) + mlx''(t$

где, если угол $\varphi(t)$ мал,
момент инерции маятник
ных величин следует из р

Для маятника длиной
$\varphi(t)$ упрощается и прини

$\frac{4}{3} ml^2\varphi''(t) + mlx''(t) -$

Из этого уравнения следуе

$x''(t) = -\frac{4}{3} l\varphi''(t) - g\varphi(t$

Подставляя (3.12) в (3.10

$\left[ml - \frac{4}{3}(M+m)l\right]\varphi''(t)$

Введя теперь угловую скор

$\omega(t) = \varphi'(t)$,

мы можем записать уравн

$\begin{bmatrix} \varphi'(t) \\ \omega'(t) \end{bmatrix} = \Bigg[\begin{matrix} 0 \\ -\dfrac{(M+m)}{A} \end{matrix}$

где $A = \left[ml - \frac{4}{3}(M+m)l\right.$

ляет решить уравнение (3.

Пример 3.4. На рис
дением Ф и напряжением

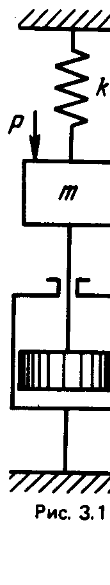

Рис. 3.1

объекта, управляю-
ы знаем физическое
едение ее отдельных
легко. Мы покажем

оказанной на рис. 3.1.
льное уравнение запи-

(3.1)

ия

(3.2)

енных состояния урав-

(3.3)

тематической моделью

(3.4)

(3.5)

ной. Уравнение выхода

(3.6)

(t) и $v(t)$ для $t \geqslant t_0$,
на систему при $t \geqslant t_0$.
ис. 3.2.
оведение этой системы
$_0)$ и $e_C(t_0)$ и входное
деляется переменными
зному.

(3.7)

(3.8)

(3.9)

стве состояний.
ник, ось которого нахо-
оложение тележки $x(t)$
и с помощью соответст-
без учета малых откло-

нений будет оставаться в вертикальном положении. Такие малые отклонения необходимы для обеспечения работы управляющего устройства. Этот объект представляет упрощенную плоскую модель устройства управления вертикальным положением ракеты после старта. Получить уравнение состояния этой модели.

Решение. Объект описывается двумя уравнениями: уравнением равновесия сил

$$ml\varphi''(t) + (M+m)x''(t) = u(t) \tag{3.10}$$

и уравнением равновесия моментов сил

$$(J + ml^2)\varphi''(t) + mlx''(t)\cos\varphi(t) - mgl\sin\varphi(t) = 0, \tag{3.11}$$

где, если угол $\varphi(t)$ мал, мы можем положить $\sin\varphi(t) = \varphi(t)$ и $\cos\varphi(t) = 1$. Символ J обозначает момент инерции маятника относительно центра масс, g — ускорение силы тяжести, а смысл остальных величин следует из рис. 3.3.

Для маятника длиной в $2l$ момент инерции $J = ml^2/3$ и уравнение (3.11) при малых углах $\varphi(t)$ упрощается и принимает вид

$$\frac{4}{3}ml^2\varphi''(t) + mlx''(t) - mgl\varphi(t) = 0.$$

Из этого уравнения следует

$$x''(t) = -\frac{4}{3}l\varphi''(t) - g\varphi(t). \tag{3.12}$$

Подставляя (3.12) в (3.10), получим

$$\left[ml - \frac{4}{3}(M+m)l\right]\varphi''(t) + (M+m)g\varphi(t) = u(t). \tag{3.13}$$

Введя теперь угловую скорость

$$\omega(t) = \varphi'(t),$$

мы можем записать уравнение состояния

$$\begin{bmatrix} \varphi'(t) \\ \omega'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{(M+m)g}{A} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{A} \end{bmatrix} u(t), \tag{3.14}$$

где $A = \left[ml - \frac{4}{3}(M+m)l\right]$. И снова знание вектора начальных условий и силы $u(t)$ при $t > t_0$ позволяет решить уравнение (3.14).

П р и м е р 3.4. На рис. 3.4 показан электродвигатель постоянного тока с постоянным возбуждением Ф и напряжением якоря $u(t)$. Ток якоря равен $i(t)$, угловое перемещение — $\alpha(t)$ и угло-

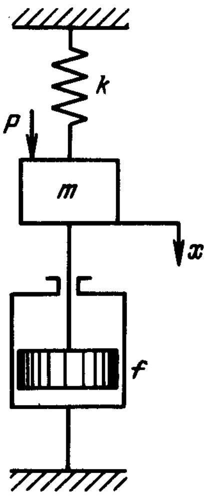

Рис. 3.1

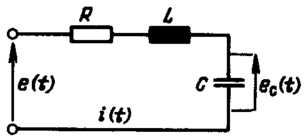

Рис. 3.2

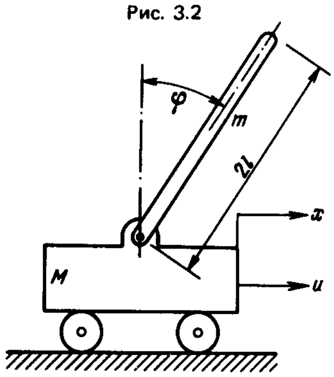

Рис. 3.3

Рис. 3.1. Механическая система.
Рис. 3.2. Электрическая цепь.
Рис. 3.3. Перевернутый маятник на тележке.

вая скорость — $\omega(t)$. Электродвижущая сила равна $E = k_1\Phi\omega$, вращающий момент двигателя $M = k_2\Phi i$, момент нагрузки $M_z = k_3\omega$. Дифференциальное уравнение электрической цепи имеет вид

$$L\frac{di}{dt} + Ri = u - E,$$

или

$$L\frac{di}{dt} + Ri = u - k_1\Phi\omega.$$

Дифференциальные уравнения вращающейся части суть

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega, \quad J\frac{d\omega}{dt} = M - M_z = k_2\Phi i - k_3\omega, \tag{3.15}$$

где J — момент инерции ротора. Уравнение состояния, следовательно, имеет вид

$$\begin{bmatrix}\alpha' \\ \omega' \\ i'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{k_3}{J} & \frac{k_2\Phi}{J} \\ 0 & -\frac{k_1\Phi}{L} & -\frac{R}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha \\ \omega \\ i\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 \\ 0 \\ \frac{1}{L}\end{bmatrix}u. \tag{3.16}$$

Во многих случаях не все переменные управляемого объекта измеримы. Измеримыми являются лишь те, которые составляют выходной вектор $y(t)$. Среди измеримых переменных обычно находятся и управляемые переменные. Число взаимно независимых управляемых переменных определяет *размерность системы*. Если каждая из N управляемых переменных многомерной системы управляется независимо, то число r входных переменных, т.е. число управляющих переменных управляемого объекта, должно быть не менее N при условии, что все входные переменные также взаимно независимы. Они обычно воздействуют на различные точки входа управляемого объекта.

Порядок системы зависит от числа переменных состояния. Этот порядок равен числу переменных состояния. Например, порядок управляемого объекта из примера 3.4 равен трем.

При управлении скоростью двигателя, измеряемой тахометром, выходная переменная (т.е. управляемая переменная) равна

$$y = h^{T}x = [0, 1, 0]x, \tag{3.17}$$

а при управлении угловым перемещением α она равна

$$y = [1, 0, 0]x. \tag{3.18}$$

С помощью уравнений (3.17) и (3.18) можно определить две различные управляемые переменные управляемого объекта из примера 3.4. Однако он является объектом с

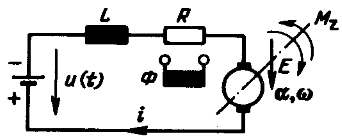

Рис. 3.4. Электродвигатель постоянного тока с постоянным возбуждением.

одним входом и одним выходом, поскольку угловое перемещение α и угловая скорость ω — взаимно зависимые переменные. Эта зависимость выражается уравнением (3.15). Общее выражение для динамики объекта из примера 3.4 в пространстве состояний задается уравнениями (3.5) и (3.6).

Если объект с одним входом и одним выходом способен отслеживать скачкообразные входные воздействия, то описание такого объекта в пространстве состояний имеет вид

$$x' = Fx + gu, \tag{3.19}$$

$$y = h^{T}x + ku. \tag{3.20}$$

В уравнении выхода
равен n, то соответств
$F(n;\ n)$, $g(n;\ 1)$, $h^{T}($
ствующих векторов.
терминологией. Систе
уравнения выхода (3.
столбец входа (*матр*
(*матрица выхода*), а k
Термины в скобках от

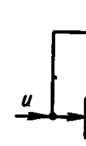

Рис. 3.5. Блок-схема, соот
с одним входом и одним в

Блок-схема на рис.
означает n параллельно
вектора x'.

§ 3.2. Представление об
уравнениями состояния

Примеры определения
в § 3.1, были все осно
дящих в нем элемента
кую модель в простран
описывающему динами
ния неоднозначен, и по
дифференциального ур
примеров часто встреча
относятся к объектам с

3.2.1. Процедура I —
Рассмотрим стационарн

Рис. 3.6.

переменной y (рис. 3.6
ным уравнением с посто

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j$$

Вводя оператор

$$D = \frac{d}{dt},$$

можно формально запис

$$\sum_{i=0}^{n} a_i D^i y(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j$$

В уравнении выхода появилось дополнительное слагаемое ku. Если порядок объекта равен n, то соответствующие матрицы в уравнениях (3.19) и (3.20) имеют размерности $F(n;\ n)$, $g(n;\ 1)$, $h^{\mathrm{T}}(1;\ n)$ и $k(1;\ 1)$, которые согласованы с размерностями соответствующих векторов. В последующем изложении мы будем пользоваться следующей терминологией. Система уравнений состояния состоит из *уравнения динамики* (3.19) и *уравнения выхода* (3.20). В уравнении динамики F — *матрица динамики*, а g — *матрица-столбец входа* (*матрица входа*). В уравнении выхода h^{T} — *матрица-строка выхода* (*матрица выхода*), а k — *коэффициент усиления по входу* (*матрица усиления по входу*). Термины в скобках относятся к многомерным системам.

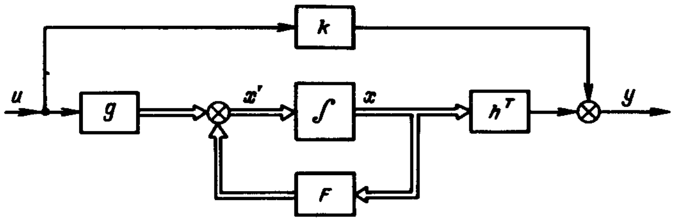

Рис. 3.5. Блок-схема, соответствующая описанию в пространстве состояний непрерывного объекта с одним входом и одним выходом.

Блок-схема на рис. 3.5 соответствует уравнениям (3.19) и (3.20). Символ интеграла означает n параллельно включенных интеграторов, которые интегрируют компоненты вектора x'.

§ 3.2. Представление обыкновенного дифференциального уравнения уравнениями состояния

Примеры определения математических моделей управляемых объектов, приведенные в § 3.1, были все основаны на конструктивных данных объекта и на описании происходящих в нем элементарных процессов. Иногда, однако, желательно найти математическую модель в пространстве состояний по известному дифференциальному уравнению, описывающему динамику объекта. Ранее уже отмечалось, что выбор переменных состояния неоднозначен, и поэтому недостаточно привести только один метод преобразования дифференциального уравнения в пространство состояний. Поэтому мы приведем ряд примеров часто встречающихся преобразований. Приводимые в этом разделе примеры относятся к объектам с одним входом и одним выходом.

3.2.1. Процедура I — переменные состояния определяются соотношением $x_{i+1} = x_i'$. Рассмотрим стационарный управляемый объект с входной переменной u и выходной

Рис. 3.6. Непрерывный объект с одним входом и одним выходом.

переменной y (рис. 3.6), динамика которого описывается линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j u^{(j)}(t), \qquad n \geqslant m. \tag{3.21}$$

Вводя оператор

$$D = \frac{d}{dt}, \tag{3.22}$$

можно формально записать уравнение (3.21) в виде

$$\sum_{i=0}^{n} a_i D^i y(t) = \sum_{j=0}^{m} b_j D^j u(t), \qquad n \geqslant m, \tag{3.23}$$

или после замены переменных

$$\widetilde{A}y(t) = \widetilde{B}u(t), \tag{3.24}$$

где

$$\widetilde{A} = \sum_{i=0}^{n} a_i D^i \quad \text{и} \quad \widetilde{B} = \sum_{j=0}^{m} b_j D^j. \tag{3.25}$$

Из уравнения (3.24) формально следует, что

$$y(t) = \widetilde{A}^{-1}\widetilde{B}u(t). \tag{3.26}$$

Полагая

$$\widetilde{A}^{-1}\widetilde{B}u(t) = \widetilde{B}x(t), \tag{3.27}$$

имеем

$$\widetilde{A}^{-1}u(t) = x(t). \tag{3.28}$$

Таким образом, уравнение (3.24) мы заменили двумя соотношениями

$$\widetilde{A}x(t) = u(t), \tag{3.29}$$

$$\widetilde{B}x(t) = y(t). \tag{3.30}$$

Если теперь ввести переменные состояния

$$\begin{aligned} &x(t) = x_1(t), \\ &x^{(1)}(t) = x_2(t) = x_1^{(1)}(t), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &x^{(n-1)}(t) = x_n(t) = x_{n-1}^{(1)}(t), \end{aligned} \tag{3.31}$$

то очевидно, что

$$x^{(n)}(t) = x_n^{(1)}(t), \tag{3.32}$$

и уравнение (3.29) может быть записано в виде

$$x_n^{(1)}(t) = \frac{1}{a_n}u(t) - \frac{a_{n-1}}{a_n}x_n(t) - \dots - \frac{a_1}{a_n}x_2(t) - \frac{a_0}{a_n}x_1(t). \tag{3.33}$$

Соотношения (3.31) и уравнение (3.33) можно записать одним уравнением с помощью постоянных матричных операторов и вектора переменных состояния:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(1)}(t) \\ x_2^{(1)}(t) \\ \dots \\ x_n^{(1)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & \dots & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix} u(t). \tag{3.34}$$

С помощью переменных состояния (3.31) из уравнения (3.30) можно получить уравнение, определяющее преобразование переменных состояния $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, в выходную переменную $y(t)$:

$$b_0x_1(t) + b_1x_2(t) + \dots + b_{n-1}x_n(t) + b_nx_n^{(1)}(t) = y(t), \qquad n = m. \tag{3.35}$$

Подставляя выражение (3.33) в уравнение (3.35), получим

$$y(t) = \left(b_0 - \frac{a_0}{a_n}b_n\right)x_1(t) + \left(b_1 - \frac{a_1}{a_n}b_n\right)x_2(t) + \dots$$

$$\dots + \left(b_{n-1} - \frac{a_{n-1}}{a_n}b_n\right)x_n(t) + \frac{b_n}{a_n}u(t). \tag{3.36}$$

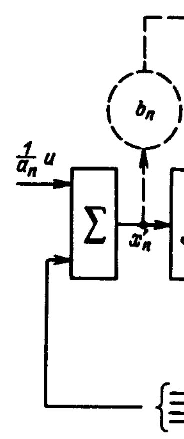

Рис. 3.7. Блок-сх

Уравнениям (3.34) и (3

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} \end{bmatrix}$$

$$h^{\mathrm{T}} = \Big[b_0 - \frac{a_0}{a_n}b_n, \ b_1$$

Матрица динамики F и с
зываемую форму Фробен
при $b_n = 0$ и $a_n = 1$.

Уравнения состояния
мы, которая показана на
с номерами до $m = n - 1$

Если константы b_1, b_2
$i = 1, 2, \dots, n$, совпада
$y^{(i-1)}(t)$, $i = 1, 2, \dots,$
состояния, которое приня

Пример 3.5. Примени
дифференциальному уравнени

$2y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = u(t$

Решение. В соответствии с

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

3.2.2. Процедура II
производных входных и
та описывается диффере
смотрим этот случай и

(3.24)

(3.25)

(3.26)

(3.27)

(3.28)

ями

(3.29)

(3.30)

(3.31)

(3.32)

(3.33)

равнением с помощью
ия:

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \\ \overline{a_n} \end{bmatrix} u(t).$$

(3.34)

жно получить уравне-
$i = 1, 2, \dots, n$, в вы-

(3.35)

(3.36)

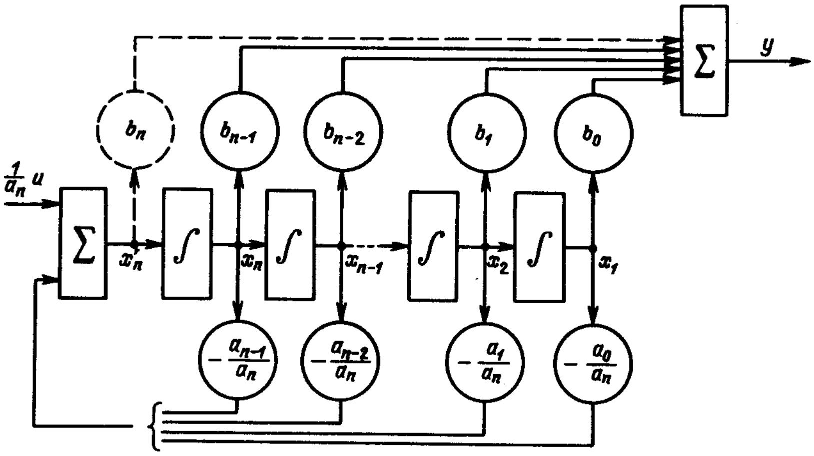

Рис. 3.7. Блок-схема, соответствующая уравнениям состояния (3.34) и (3.36).

Уравнениям (3.34) и (3.36) соответствуют уравнения состояния (3.19) и (3.20), где

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & \dots & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{bmatrix}, \qquad g = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \frac{1}{a_n} \end{bmatrix},$$

$$h^{\mathrm{T}} = \left[b_0 - \frac{a_0}{a_n} b_n,\ b_1 - \frac{a_1}{a_n} b_n, \dots, b_{n-1} - \frac{a_{n-1}}{a_n} \right], \qquad k = \frac{b_n}{a_n}.$$

Матрица динамики F и соответствующая ей транспонированная матрица имеют так называемую форму Фробениуса. Очевидные упрощения этих двух уравнений имеют место при $b_n = 0$ и $a_n = 1$.

Уравнения состояния (3.34) и (3.36) можно также представить с помощью блок-схемы, которая показана на рис. 3.7, где непрерывные линии соответствуют компонентам с номерами до $m = n - 1$, а компонента с номером $m = n$ показана пунктирной линией.

Если константы $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ равны нулю и $b_0 = 1$, то переменные состояния x_i, $i = 1, 2, \dots, n$, совпадают с выходной переменной объекта и ее производными, т.е. с $y^{(i-1)}(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Это дает некоторые преимущества определению переменных состояния, которое принято в этом примере.

Пример 3.5. Применить процедуру I для получения уравнения состояния, соответствующего дифференциальному уравнению

$$2y''(t) + 3y'(t) + 2y(t) = u(t) + 5u'(t).$$

Решение. В соответствии с уравнениями (3.34) и (3.36) мы имеем

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} u(t), \qquad y(t) = [1, 5]\ [x_1(t),\ x_2(t)]^{\mathrm{T}}.$$

3.2.2. Процедура II — переменные состояния являются линейной комбинацией производных входных и выходных переменных объекта. Пусть снова динамика объекта описывается дифференциальным уравнением n-го порядка (3.21), где $m = n$. Рассмотрим этот случай и определим переменные состояния с помощью следующих соотношений:

$$x_1(t) = a_n y(t) - b_n u(t),$$
$$x_2(t) = a_{n-1} y(t) + a_n y^{(1)}(t) - b_n u^{(1)}(t) - b_{n-1} u(t),$$
$$x_3(t) = a_{n-2} y(t) + a_{n-1} y^{(1)}(t) + a_n y^{(2)}(t) - b_n u^{(2)}(t) - b_{n-1} u^{(1)}(t) - b_{n-2} u(t),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (3.37)$$
$$x_n(t) = a_1 y(t) + a_2 y^{(1)}(t) + \ldots + a_n y^{(n-1)}(t) - b_n u^{(n-1)}(t) -$$
$$- b_{n-1} u^{(n-2)}(t) - \ldots - b_1 u(t).$$

Из первого уравнения системы (3.37) вычислим $y(t)$ и подставим полученное значение в оставшиеся уравнения. Далее мы заменим все слагаемые, включающие все производные $y(t)$ и $u(t)$, на первую производную переменной состояния, которая в каждом случае определяется предыдущим уравнением. Мы получим

$$x_2(t) = \frac{a_{n-1}}{a_n} x_1(t) + x_1'(t) - \left(b_{n-1} - \frac{a_{n-1}}{a_n} b_n\right) u(t),$$
$$x_3(t) = \frac{a_{n-2}}{a_n} x_1(t) + x_2'(t) - \left(b_{n-2} - \frac{a_{n-2}}{a_n} b_n\right) u(t),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (3.38)$$
$$x_n(t) = \frac{a_1}{a_n} x_1(t) + x_{n-1}'(t) - \left(b_1 - \frac{a_1}{a_n} b\right) u(t).$$

Объединим уравнения (3.38) с исходным дифференциальным уравнением, которое с помощью введенных переменных состояния принимает вид

$$0 = \frac{a_0}{a_n} x_1(t) + x_n'(t) - \left(b_0 - \frac{a_0}{a_n} b_n\right) u(t). \qquad (3.39)$$

Тогда уравнения (3.38) и (3.39) с помощью матричных операторов можно записать следующим образом:

$$\begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \cdots \\ x_n'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{a_{n-1}}{a_n} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -\frac{a_{n-2}}{a_n} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\frac{a_0}{a_n} & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \cdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{n-1} - \frac{a_{n-1}}{a_n} b_n \\ b_{n-2} - \frac{a_{n-2}}{a_n} b_n \\ \cdots \\ b_0 - \frac{a_0}{a_n} b_n \end{bmatrix} u(t). \qquad (3.40)$$

В этом случае преобразование переменных состояния $x_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, в выходную переменную $y(t)$ тривиально. Оно определяется первым уравнением системы (3.37). Для компактности мы запишем это уравнение в матричной форме

$$y(t) = \left[\frac{1}{a_n}, 0, 0, \ldots, 0\right] x(t) + \frac{b_n}{a_n} u(t). \qquad (3.41)$$

Уравнения состояния (3.40) и (3.41) снова имеют вид уравнений (3.19) и (3.20). Блок-схема уравнений состояния показана на рис. 3.8.

Преимущество выбора переменных состояния в соответствии с изложенной выше процедурой заключается в том, что $x_1(t) = y(t)$ при произвольных значениях $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$ и при $b_n = 0$ и $a_n = 1$.

В этом случае при расчетах мы не должны выполнять преобразование (3.41), тогда как определение выходной переменной $y(t)$ в соответствии с п. 3.2.1 всегда требует преобразования (3.36).

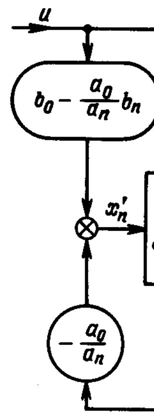

Рис. 3.8. Бло

П р и м е р 3.6. О
ветствующее дифференц
Решение.

Разделив исходное урав

3.2.3. Уравнения
менных. Если управл
одновременно с воз
нарного объекта имее

При $m = l = n - 1$ и в

или кратко

где смысл отдельных

$^{1)}(t) - b_{n-2}u(t)$,
. . . . (3.37)

м полученное значение
чающие все производ-
которая в каждом слу-

(3.38)

уравнением, которое

(3.39)

торов можно записать

$$- \frac{a_{n-1}}{a_n} b_n \quad - \frac{a_{n-2}}{a_n} b_n \quad \dots \quad - \frac{a_0}{a_n} b_n \quad u(t).$$

(3.40)

, 2, . . . , n, в выходную
нием системы (3.37).

(3.41)

(3.19) и (3.20). Блок-

и с изложенной выше
х значениях $b_0, b_1, \dots$

азование (3.41), тогда
п. 3.2.1 всегда требует

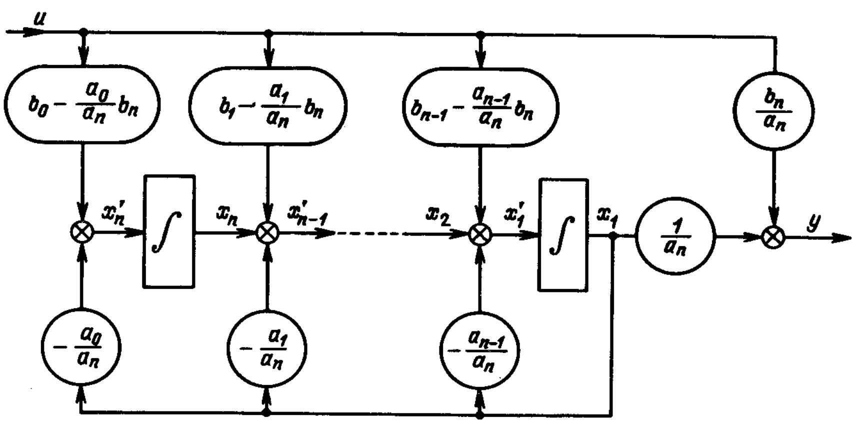

Рис. 3.8. Блок-схема, соответствующая уравнениям состояния (3.40) и (3.41).

Пример 3.6. Определить согласно уравнениям (3.40) и (3.41) уравнение состояния, соответствующее дифференциальному уравнению из примера 3.5.

Решение.

$$\begin{bmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \qquad y(t) = \frac{1}{2} x_1(t).$$

Разделив исходное уравнение на константу $a_n = a_2 = 2$, мы получим

$$\begin{bmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} u(t), \qquad y(t) = x_1(t).$$

3.2.3. Уравнения состояния при воздействии управляющих и возмущающих переменных. Если управляющие переменные $u(t)$ действуют на вход управляемого объекта одновременно с возмущающими переменными $w(t)$, то уравнение линейного стационарного объекта имеет вид

$$\sum_{i=0}^{n} a_i y^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^{m} b_i u^{(i)}(t) + \sum_{i=0}^{l} c_i w^{(i)}(t), \quad m < n, \ l < n. \tag{3.42}$$

При $m = l = n - 1$ и в соответствии с процедурой II (см. п. 3.2.2) мы имеем

$$\begin{bmatrix} x'_1(t) \\ x'_2(t) \\ \dots \\ x'_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{a_{n-1}}{a_n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{a_{n-2}}{a_n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_0}{a_n} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{n-1} & c_{n-1} \\ b_{n-2} & c_{n-2} \\ \dots & \dots \\ b_0 & c_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ w(t) \end{bmatrix}, \tag{3.43}$$

$$y(t) = \left[\frac{1}{a_n}, \ 0, 0, \dots, 0 \right] x(t), \tag{3.44}$$

или кратко

$$x'(t) = Fx(t) + Gu^*(t), \tag{3.45}$$

$$y(t) = h^{\mathrm{T}} x(t), \tag{3.46}$$

где смысл отдельных обозначений следует из сравнения уравнений (3.43) и (3.45).